

# 地球物理数据处理基础

——附石油勘探上的应用

[美] J·F·克利尔波特

陈 玉 陈乾元 译  
刘则仁 周继康  
甘章泉 程乾生 校订

石油化学工业出版社

全书共十一章。前七章，扼要地叙述了数据处理的基本原理和方法；变换、单边函数、谱因式分解、分辨率、矩阵、最小二乘法及其在波形上的应用等；后四章讲述了波动方程数据处理，并着重介绍了波动方程在处理石油地震勘探资料中的应用。

本书可供地震勘探资料研究人员及有关院校师生参考。

**JON F. CLAERBOUT**  
**FUNDAMENTALS OF GEOPHYSICAL DATA**  
**PROCESSING**

**With Applications to Petroleum**  
**Prospecting**

Copyright © 1976 by McGraw-Hill, Inc.

Printed in the United States of  
America

地球物理数据处理基础

——附石油勘探上的应用

陈玉 陈乾元

刘刚仁 周继康 译

甘章泉 程乾生 校订

石油化学工业出版社出版

(北京和平里七区十六号楼)

石油化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

开本787×1092 1/32 印张 字数 印数1—11,550

1979年2月北京第一版 1979年2月北京第一次印刷

书号15063·油171 定价1.30元

# 目 录

译者的话 .....	1
引言 .....	2
<b>第1章 变换 .....</b>	<b>5</b>
1-1 采样数据和Z变换 .....	5
1-2 Z变换与付里叶变换 .....	11
1-3 快速付里叶变换 .....	15
1-4 相位延迟和群延迟 .....	20
1-5 相关和谱 .....	25
1-6 希尔伯特变换 .....	29
<b>第2章 单边函数 .....</b>	<b>34</b>
2-1 反滤波 .....	34
2-2 最小相位 .....	39
2-3 并联滤波器 .....	42
2-4 正实函数 .....	45
2-5 窄带滤波器 .....	49
2-6 全通滤波器 .....	55
2-7 陷带滤波器和尖带滤波器 .....	59
2-8 双线性变换 .....	61
<b>第3章 谱因式分解 .....</b>	<b>67</b>
3-1 求根法 .....	67
3-2 鲁宾逊能量延迟定理 .....	71
3-3 陶布里兹方法 .....	72
3-4 怀特尔指数一对数法 .....	79
3-5 柯尔莫廓洛夫方法 .....	81

3-6	因果原理与波的传播 .....	85
<b>第4章</b>	<b>分辨率 .....</b>	<b>90</b>
4-1	时间与频率的分辨率 .....	90
4-2	时间与统计分辨率 .....	96
4-3	频率与统计分辨率 .....	103
4-4	时间、频率与统计分辨率 .....	108
4-5	中心极限定理 .....	112
4-6	置信区间 .....	117
<b>第5章</b>	<b>矩阵与多道时间序列 .....</b>	<b>120</b>
5-1	矩阵提要 .....	120
5-2	矩阵的函数 .....	126
5-3	矩阵滤波器 .....	134
5-4	马尔可夫链 .....	139
<b>第6章</b>	<b>最小二乘法拟合 .....</b>	<b>143</b>
6-1	方程个数多于未知数个数 .....	144
6-2	加权与约束 .....	152
6-3	方程个数少于未知数个数 .....	156
6-4	豪斯贺德变换和哥路伯方法 .....	159
6-5	模型范数的选择 .....	164
6-6	健全的拟合 .....	168
<b>第7章</b>	<b>最小二乘法在波形上的应用 .....</b>	<b>178</b>
7-1	预测及滤波器的形成 .....	178
7-2	伯格谱估计 .....	182
7-3	自适应滤波 .....	187
7-4	多道滤波器的设计 .....	191
7-5	来文森递推法 .....	194
7-6	约束滤波 .....	196
<b>第8章</b>	<b>波场与反射系数的计算 .....</b>	<b>198</b>
8-1	反射系数和透射系数 .....	198

8-2	层状介质中的能流 .....	203
8-3	由反射系数计算波场 .....	210
8-4	由波计算反射系数 .....	217
<b>第9章</b>	<b>层状介质的数学物理问题 .....</b>	<b>224</b>
9-1	由物理问题归结成数学问题 .....	224
9-2	数值积分矩阵 .....	229
9-3	上行波和下行波 .....	232
9-4	源与接收器的互易性 .....	239
9-5	守恒原理和解的正交性 .....	245
9-6	弹性波 .....	249
<b>第10章</b>	<b>二维和三维初值问题 .....</b>	<b>252</b>
10-1	古典的时间初值问题 .....	252
10-2	光学上波的外推 .....	259
10-3	单色波的数值外推 .....	265
10-4	时倚波形在空间的外推 .....	282
10-5	光束耦合 .....	293
10-6	数值的粘滞性 .....	300
<b>第11章</b>	<b>用波动方程进行地震数据处理 .....</b>	<b>308</b>
11-1	道集和剖面的向下延拓 .....	308
11-2	波动方程偏移 .....	320
11-3	速度估计 .....	332
11-4	多次反射 .....	347
<b>参考文献</b>	<b>.....</b>	<b>356</b>

## 译 者 的 话

原书于1976年出版。这是一本供大学地球物理系毕业生及从事地球物理数据处理的技术人员阅读的教科书。

全书共有十一章。前七章，扼要地叙述了数据处理的基本原理和方法。后四章，讲述了波动方程数据处理，并着重介绍了波动方程在处理石油地震勘探资料中的应用。这本书在一定程度上反映了美国大学有关专业的教学水平和近几年来在数据处理方面的部分研究成果。每节后面都附有练习，有些题目对于引导读者进行科学研究有启发作用。

本书在写作上，偏重于概念的描述，而不强调定义的明确性。书中常常用简单的特例验证一些重要的定理，但不注意证明的严格性和形式上的完整性。这就要求读者在阅读中细心一些。

本书由石油化学工业部石油地球物理勘探局北京数字处理会战指挥部组织翻译。参加翻译的同志有：陈玉、刘则仁、陈乾元、周继康。全书经北京大学数学力学系甘章泉和程乾生同志做了校订。

原文中一些明显的错误，译者作了更正，删去了一些不必要的词句，有些地方加了译注，供读者参考。由于译者水平所限，译文中有些错误或不妥之处，望同志们批评指正。

一九七七年九月

## 引 言

地球物理数据处理就是利用计算机分析地球物理资料。地球物理学的一个主要任务是在不可能直接打井的地方，进行地震、电法、磁法和重力勘探，对地下作间接测量以尽可能地确定地壳内部的结构。系统地应用物理定律和统计原理，通过计算机可以完成这些勘探资料的某些解释任务。在勘测效率很低取得资料不多时，能做到将观测结果与古典物理方程的已知解析解（调整其中的参数）相匹配就很满意了。而今天，勘测效率较高，能取得大量关于地壳的资料，远比用解析解作模型所能提供的资料多得多。海上反射地震勘探就是这样，一般每月能采集上兆位的数据资料。

对这大量的数据，我们一方面要作统计整理，另一方面又要计算多个参数的地壳模型的理论解。从一九五三年就开始利用数字计算机统计分析地球物理资料了〔1〕。以后，地球物理计算又取得了很大的进展〔2〕，有关文章中，解决了在多个平行的平缓地层（每层的物理性质可以任意预定）模型中，计算地震面波的问题。这样，就可以利用完整的地震波形来拟合任意的成层模型（成层的意思是，物理性质只是一维坐标的函数，通常是深度的函数）。这种方法在最近二十年中，有了广泛的发展。现在对于成层地壳模型，无论源的分布如何，都容易计算其地震和电磁的理论结果。事实上，近来发表的数学物理方面的文献中，都是研究成层介质模型，几乎很少讨论均匀介质了。

地震记录常常含有几百个振动，而多数振动是不需要解释的。精细的方法已发展到利用地震记录制作与之相适合的成层介质模型，而其层参数和数据可以有随机的变化。一个惊人的发现是，复杂的难于说明的爆炸地震记录，完全可以预先制作出来。甚至天然地震记录，在震源范围不大时，也可以预先制作出来。于是，数据分析中引入随机变量，通常主要是使资料与成层模型拟合得好些。

与上述研究成层介质的问题不一样，当前地壳研究中提出的多数问题，已是在证实大陆漂移的机理，掌握、了解天然地震和寻找石油及矿产等方面了。因此，今天地球物理数据处理的新领域，在于使野外资料与二、三维不均匀的地壳模型相符合。而为了进行这些研究，需要熟悉一些传统的基础教材。

地球物理数据处理是从研究时间域采样的滤波理论和谱分析开始的。因果律原理对数学上的限制是非常重要的，即使复杂的地壳模型也符合这个原理，并且计算的稳定性常常取决于其程序对这个原理符合的严格程度。为了使读者了解最小二乘法的一般原理，要复习一下分辨率、统计量和矩阵等基本概念，并为此举了大量例子。最小二乘法是使资料与理论模型一致的主要手段，同时，高分辨技术（极大熵函数）和通俗一点的技术（ $L_1$ 范数和线性规划）同样也是很重要的。

本书在介绍了地球物理数据处理的一些基本概念之后，还从简单到复杂地介绍了一些地壳模型。其中，在连续性、因果关系和能量守恒等一般概念的基础上（没有引用更多的物理概念），研究了层状介质中的多次反射平面波。知道了介质的特点，便可计算波；反之，可以从波的计算了解介质。



然后，介绍更为一般的成层介质的数学物理计算理论，并研究偏微分方程的有限差分近似的主要特性。

最后几章，介绍波的外推和偏微分方程数据处理〔3~8, 36, 37〕。目前，地球物理界以外的科学家和工程师，还不了解这些内容。其基本思想与全息学相似。在地面观测波场，是为了制作地下散射的二维或三维模型，但主要问题和所用的技术与全息学有很大差别。速度的不均匀性、绕射、干涉和多次波是地震波传播中普遍存在的特性，如果仅仅靠目察是很容易造成误解的。

有关波动方程数据处理的材料，不久之后还要再写。这种新方法在石油勘探方面的应用，肯定会很快地发展，目前已出现了许多研究成果。因此，最后几节中，我们把重点放在其主要的和基本的内容上，而不涉及它应用的细节。

我们希望，总有一天，能利用天然地震波的地震记录，了解十公里以下的地壳特征，获得其第一幅图片。

# 第 1 章 变 换

数据分析的第一步是学习如何用数字计算机表示和处理波形。通常认为时间、空间是连续的，但是，为了用计算机进行分析，必须将它们离散化。离散化也叫作数字化或采样。将连续函数离散化，乍看起来，好象是坏事，似乎由于我们采用的数据不一定是能用解析式表达的函数，所以才不得不离散化。有了一些使用采样函数的体验之后，便会发现，阐明许多数学概念，用采样时间比连续时间容易。例如，本章引入的  $Z$  变换概念，它和付里叶变换是一回事。不过，对  $Z$  变换，有初等代数的基础就可以了解，而付里叶变换则需要相当的微积分知识。

## 1-1 采样数据和 $Z$ 变换

研究如图1-1所示的时间函数。

要用计算机对这种观测到的时间函数进行分析，必须用某种方法，把数罗列出来，近似地表示它。通用的方法是，按等间隔的时间点求取或观测  $b(t)$ 。在这个例子中，连续函数可以近似地用下列向量表示

$$b_t = (\dots 0, 0, 1, 2, 0, -1, -1, 0, 0, \dots)$$

可以看出，时间点取得越密，近似程度就越高。此函数除了用向量表示之外，还可以用一个多项式表示，多项式的系数取为  $b(t)$  在相邻时间点的值。此例中为

$$B(Z) = 1 + 2Z + 0Z^2 - Z^3 - Z^4 \quad (1-1-1)$$

这个多项式称为  $b_t$  的  $Z$  变换。此多项式中， $Z$  是什么意思呢？并不是说  $Z$  应取某个数值，而是单位延迟算子。例如， $ZB(Z) = Z + 2Z^2 - Z^4 - Z^5$  可以画成图1-2，它的波形与图1-1相同，只是时间上延迟了一个单位。

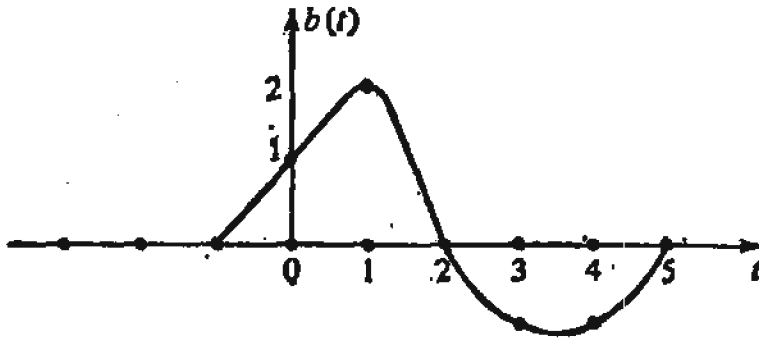


图 1-1

连续函数按相等时间间隔采样

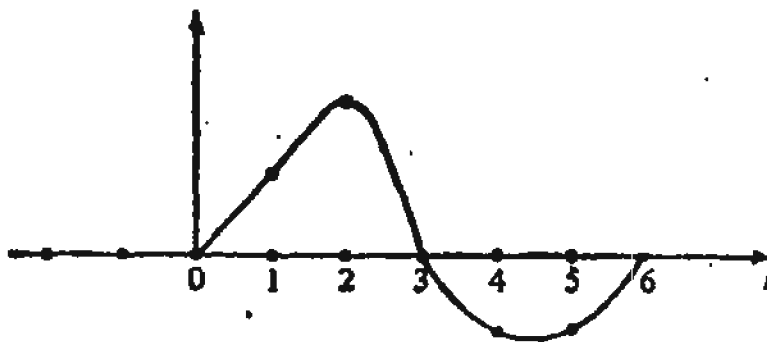


图 1-2

$ZB(Z)$  的系数是将  $B(Z)$  的系数后移一步得到的

我们知道，当  $B(Z)$  乘以  $Z^n$  时，时间函数  $b_t$  就延迟了  $n$  个单位时间。延迟算子  $Z$  在分析波的时候非常重要，借助于它，波可按指定的时间量，移动自己的位置。

延迟算子的另一个意义是，利用它可通过较简单的函数作成较复杂的函数。假如， $b(t)$  代表声压力函数或一定距离处爆炸后观测到的地震记录，则  $b(t)$  称为脉冲响应。若另一次爆炸是在第一次爆炸之后， $t=10$  个单位时间，则其压力

函数  $y(t)$  如图1-3所示。

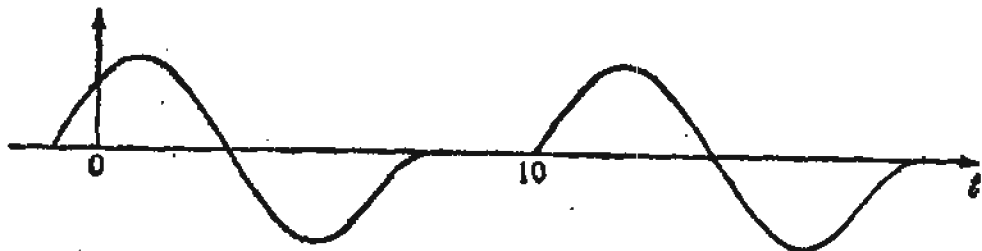


图 1-3

两次爆炸的脉冲响应

用  $Z$  变换来表示, 为

$$Y(Z) = B(Z) + Z^{10}B(Z)$$

如果, 第一次爆炸后, 有一次爆聚(它与爆炸的区别仅在于记录的极性相反), 强度为前一次的一半, 则

$$Y(Z) = B(Z) - \frac{1}{2}Z^{10}B(Z)$$

若脉冲在时间上互相重叠 [ $B(Z)$  中  $Z$  的幂大于 10 时, 就是这种情况], 则波形在重叠部分相加。假设它们仅是相加而无相互作用, 则这种假设叫线性假设。这种线性假设在实际中通常都成立。在地震勘探中, 我们看到, 虽然地壳是一种由不同形状和种类的岩石组成的不均匀的凝合体, 而当地震波(常指其振幅)在地壳中旅行时, 它们互相不干扰, 它们满足线性假设。非线性现象是大振幅的扰动引起的, 而不是由于任何地质情况的复杂性。

现在, 假定在  $t=0$  时有一次爆炸, 在  $t=1$  时有一次  $\frac{1}{2}$  强度的爆聚, 在  $t=3$  时又有一次强度为  $\frac{1}{4}$  的爆炸。这一串事件构成“震源”的时间系列  $x_t = (1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$ 。它的  $Z$  变换是

$$X(Z) = 1 - \frac{1}{2}Z + \frac{1}{4}Z^3$$

通过检波器观测这一串爆炸和爆聚得到的结果记为  $y_t$ ,  $y_t$  的  $Z$  变换  $Y(Z)$  为

$$\begin{aligned} Y(Z) &= B(Z) - \frac{Z}{2}B(Z) + \frac{Z^3}{4}B(Z) \\ &= \left(1 - \frac{Z}{2} + \frac{Z^3}{4}\right)B(Z) \\ &= X(Z)B(Z) \end{aligned} \quad (1-1-2)$$

这后一式子说明了线性系统理论的一个基本出发点: 输出  $Y(Z)$  可以表达为输入  $X(Z)$  与脉冲响应  $B(Z)$  的乘积。

线性系统的例子很多, 大量的电子线路都是线性系统。将一个系统的输出再作为另一个系统的输入, 就可形成复合线性系统。假如, 有两个线性系统, 分别由  $B(Z)$  和  $C(Z)$  表示。我们要问, 如图 1-4 所示的组合而成的两个系统是不

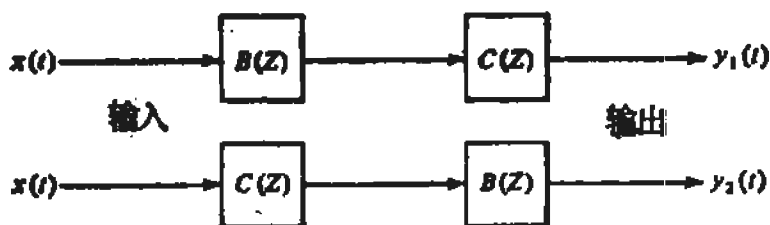


图 1-4

两个等效的滤波系统

是等效的? 利用  $Z$  变换, 可以断定这两个系统是等效的, 因为多项式乘法是可交换的

$$Y_1(Z) = [X(Z)B(Z)]C(Z) = XBC \quad (1-1-3)$$

$$Y_2(Z) = [X(Z)C(Z)]B(Z) = XCB = XBC \quad (1-1-4)$$

下面讨论脉冲响应为  $B(Z) = 2 - Z - Z^2$  的系统。这个

多项式可以作因式分解,  $2 - Z - Z^2 = (2 + Z)(1 - Z)$ , 这样就得到如图 1-5 所示的三个等效系统。由于任何多项式都可

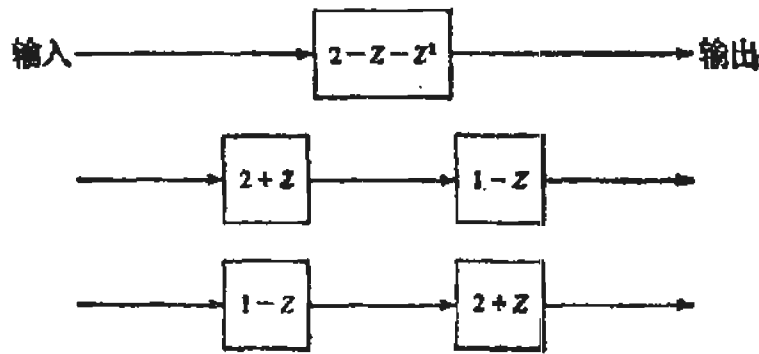


图 1-5  
三个等效的滤波系统

作因式分解, 因此, 任何脉冲响应都可由双项滤波器作串联来模拟( $Z$  变换的脉冲响应对  $Z$  是线性的)。

两个  $Z$  变换相乘, 在计算机中是怎样做的呢? 滤波器  $2 + Z$ , 在计算机中, 是存好系数  $(2, 1)$ , 同样,  $1 - Z$  表示为  $(1, -1)$ 。再看在一般情况下, 是怎么计算的。对

$$X(Z)B(Z) = Y(Z) \quad (1-1-5)$$

$$(x_0 + x_1Z + x_2Z^2 + \dots)(b_0 + b_1Z + b_2Z^2) = (y_0 + y_1Z + y_2Z^2 + \dots) \quad (1-1-6)$$

等式两边  $Z$  的同幂项的系数相等, 得

$$y_0 = x_0b_0$$

$$y_1 = x_1b_0 + x_0b_1$$

$$y_2 = x_2b_0 + x_1b_1 + x_0b_2$$

$$y_3 = x_3b_0 + x_2b_1 + x_1b_2 \quad (1-1-7)$$

$$y_4 = x_4b_0 + x_3b_1 + x_2b_2$$

$$y_k = \sum_{i=0}^2 x_{k-i}b_i \quad (1-1-8)$$

```

DIMENSION X(LX),B(LB),Y(LY)
LY = LX+LB-1
DO 10 I=1,LY
10 Y(I) = 0.
DO 20 I=1,LX
DO 20 J=1,LB
20 Y(I+J-1) = Y(I+J-1) + X(I)*B(J)

```

图 1-6  
褶积计算程序

(1-1-8)式称为褶积公式。那么,可以说,两多项式的积仍是一个多项式,它的系数用褶积求得。图1-6中列出了一段算褶积的Fortran程序,两端数据不足处充了零。读者要注意, $X(Z)$ 和 $Y(Z)$ 不一定是严格意义下的多项式,它们可能同时包含 $Z$ 的正、负幂,即可以是

$$X(Z) = \dots \frac{x_{-2}}{Z^2} + \frac{x_{-1}}{Z} + x_0 + x_1 Z + \dots$$

$$Y(Z) = \dots \frac{y_{-2}}{Z^2} + \frac{y_{-1}}{Z} + y_0 + y_1 Z + \dots \quad (1-1-9)$$

$X(Z)$ 和 $Y(Z)$ 中出现 $Z$ 的负幂项仅仅表示,数据在 $t=0$ 之前有定义。但在滤波器中, $Z$ 的负幂的作用就很不同了。从(1-1-8)可以看出,在时间 $k$ 出现的输出 $y_k$ 是当前的和过去的输入即 $(x_i, i \leq k)$ 的线性组合。若滤波器 $B(Z)$ 包含了 $b_{-1}/Z$ 这样的项,则于时间 $k$ 的输出 $y_k$ 应是当前的和过去的输入及 $x_{k+1}$ 的线性组合。 $x_{k+1}$ 是一个在 $t=k$ 时实际上还没有到达的输入。这种滤波器叫作物理上不可实现的滤波器,因为客观上,它并不能工作,对于还没有发生的事是不可能作出什么响应的。不过,在全部数据都已预先记录下来的情况下,物理上不可实现的滤波器有时可在计算机模拟中使用。

## 练习

1. 设  $B(Z) = 1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4$ , 试绘出  $B(Z)$  的系数图, 并绘  $[B(Z)]^2$  的系数图。
2. 若  $x_t = \cos\omega_0 t$  ( $t$  取整数),  $b_t = (b_0, b_1)$ ,  $Y(Z) = X(Z)B(Z)$ 。记  $y_t = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ , 问其中  $A$  和  $B$  等于什么?
3. 证明: 当  $x_t = \cos\omega_0 t$ ,  $b_t = (b_0, b_1, \dots, b_n)$  时,  $y_t$  总具有形式  $A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ 。

## 1-2 Z 变换与付里叶变换

我们已经定义了  $Z$  变换是

$$B(Z) = \sum_t b_t Z^t \quad (1-2-1)$$

若用  $e^{i\omega}$  替代  $Z$ , 便得“付里叶和”

$$B(Z) = B(e^{i\omega}) = \sum_t b_t e^{i\omega t} \quad (1-2-2)$$

这与付里叶积分相象, 对它作极限运算即得积分。从另一观点看, 付里叶积分

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t) e^{i\omega t} dt \quad (1-2-3)$$

当  $b(t)$  不是时间的连续函数, 而是通过  $\delta$  函数 (狄拉克  $\delta$  函数) 表示时

$$b(t) = \sum_k b_k \delta(t-k) \quad (1-2-4)$$

积分 (1-2-3) 便化为 (1-2-2) 了。以后, 记  $B(\omega) = B(e^{i\omega})$ 。

上一节中, 已知两个多项式相乘, 就是对它们的系数作褶积。这一事实用付里叶变换的说法, 则为: 频率域的乘积对应于时间域的褶积。



尽管付里叶变换作为一个积分来说,计算可能是困难的,甚或有时是不可能的,但作  $Z$  变换则极为容易,只要将  $Z$  的各次幂附到一串数据点上就成了。对于  $B(Z)$ ,既可以把它看成是时间函数,也可以看成是频率函数。若取此多项式的系数作图,便是时间函数;若令  $Z = e^{i\omega}$ ,对  $B(Z)$  按不同频率作图,便是频率的函数。请读者注意,当  $\omega$  从  $0 \rightarrow 2\pi$  时,  $Z = e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$  将沿单位圆按反时针方向转一圈。

作  $Z$  变换,相当于将一串时间函数值配到  $Z$  的各次幂上,作逆  $Z$  变换只须按不同的时间点取  $Z$  的各次幂的系数就成了。试问,这样一种简单的“取系数”做法对于显得较为复杂的逆付里叶积分仍然可行吗?逆付里叶积分是

$$b(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} B(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1-2-5)$$

首先要注意,单位圆上  $Z^n$  或  $-\pi \leq \omega < +\pi$  上  $e^{in\omega}$  的积分,除  $n=0$  外,都是 0,因为正弦和余弦是振荡的;即

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos n\omega + i\sin n\omega) d\omega \\ &= \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n=\text{非零整数} \end{cases} \end{aligned} \quad (1-2-6)$$

用离散化时间函数表示, (1-2-5) 的逆付里叶积分是

$$b_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\dots + b_{-1}e^{-i\omega} + b_0 + b_1e^{+i\omega} + \dots) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1-2-7)$$

由 (1-2-6) 可知,积分 (1-2-7) 的所有项中,只有  $b_t$  这一项才对积分起作用,其它的项都自相抵消了。也就是说,对积分起作用的只有变换中  $Z$  的  $t$  次幂的系数。 (1-2-7)

成为

$$b_t = \frac{1}{2\pi} b_t \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega = b_t \quad (1-2-8)$$

这就说明了逆付里叶变换也正好是取  $Z$  的各次幂的系数。

在本书和其它书中，通常都假定数据采样点之间的时间间隔是 1， $\Delta t = 1$ 。为了使给定的等式对  $\Delta t$  取其它的值也能成立，只需用  $\omega \Delta t$  替代  $\omega$ ，即

$$\omega_{\text{书中}} = \omega_{\text{书中}} \Delta t_{\text{书中}} = \omega_{\text{实际}} \Delta t_{\text{实际}} \quad (1-2-9)$$

通过  $Z$  变换，便可得到  $\omega_{\text{书中}}$  的  $2\pi$  范围内（从  $-\pi$  到  $+\pi$ ）的谱。取极限  $\Delta t_{\text{实际}} \rightarrow 0$  时， $\omega_{\text{实际}}$  便为付里叶积分中的正、负无穷大限。

用采样函数近似地表达一个连续函数时，采样间隔  $\Delta t_{\text{实际}}$  要取得足够小。基础课中一个基本结论是，若在付里叶变换中，看出比频率  $\omega_{\text{max}}$  更高的频率成分已没有能量，则采样间隔取成  $\Delta t = \pi/\omega_{\text{max}}$ ，并不会丢失信息，也就是说，余弦波的采样，每个波长内至少得有两个点。图 1-7a 表明，对正弦波的不合适的采样，往往会形成较低频率的正弦波。

下面，我们讨论函数的奇、偶部和虚、实部，看通过付里叶变换对它们有什么影响。时间函数  $b_t$  的偶数部分  $e_t$  定义为

$$e_t = \frac{b_t + b_{-t}}{2} \quad (1-2-10)$$

奇数部分定义为

$$o_t = \frac{b_t - b_{-t}}{2} \quad (1-2-11)$$

一个函数是它的奇、偶部之和，将上面两式相加，便得

$$b_t = e_t + o_t \quad (1-2-12)$$

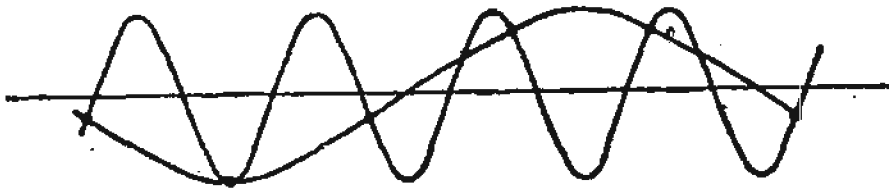


图 1-7a

若对高频正弦波的采样不够密, 便会与较低频率的正弦波相混。所以, 把  $\omega_{\max} = \pi/\Delta t$  说成是折叠频率, 意即比此频率更高的频率成分被折叠而降为较低的频率了。实际上, 类似正弦波的采样率, 每个波长都在两个点以上。有时希望在每个波长内多于八个采样点, 理由见2-8节。

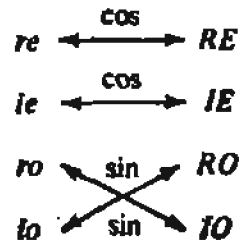


图 1-7b

表明付里叶变换对奇偶性和虚实性影响的助记图表。

例如,  $(b_{-1}, b_0, b_1) = (1, 0, 1)$  为一单纯的实偶时间函数, 由于  $\cos\omega = \cos(-\omega)$ , 所以, 它的变换  $Z + 1/Z = 2\cos\omega$  是  $\omega$  的实偶函数。而实奇时间函数  $(b_{-1}, b_0, b_1) = (-1, 0, 1)$ , 由于  $\sin\omega = -\sin(-\omega)$ , 所以, 它的变换  $Z - 1/Z = 2\sin\omega/i$  为虚奇函数。同样, 虚偶函数  $(i, 0, i)$  的变换是虚偶函数  $i\cos\omega$ , 虚奇函数  $(-i, 0, i)$  的变换是实奇函数。令  $r$  和  $i$  分别表示实、虚函数,  $e$  和  $o$  表示偶、奇函数, 大写和小写字母分别表示频率函数和时间函数。图 1-7b 总结了付里叶变换的这些对称关系。

刚才仅对简单的两点函数的实虚、奇偶的变换关系作了说明。一般情形, 皆可表示成这样的两点函数的和。而偶函数的和仍是偶函数, 实函数的和仍是实函数, 等等, 图 1-7b 中列出的表对所有时间函数都适用。注意, 任一时间函数都可表示为它的实(奇、偶)部分和虚(奇、偶)部分的和

$b_t = (re + ro) + i (ie + io)_t$ 。对  $b_t$  作付里叶变换，它的四个部分变换结果的实虚奇偶性如图1-7b中的表所示。

### 练习

1. 通常一个函数要么全部定义在时间域，要么全部定义在频率域。当知道时间域的函数时，通过变换可得到其频率域；反之亦然。若在时间域中有一半信息，即  $t < 0$ ， $b_t = 0$ ；而在频率域中又有一半信息，即实部  $RE + RO$ 。问如何确定这个函数的其它部分？

## 1-3 快速付里叶变换

写表达式

$$B(Z) = b_0 + b_1 Z + \dots \quad (1-3-1)$$

时，既表示了一个时间函数，同时也表示了它的付里叶变换。若描出系数  $(b_0, b_1, \dots)$ ，便得时间函数。若按实  $\omega$  值算出  $B(e^{i\omega})$  并绘图，便得其变换（注：对于实  $\omega$ ， $Z$  的模为 1，即在单位圆上）。由于  $\omega$  是连续变量，而在计算机中，一切都是有限的，那么，在计算中，如何选有限个  $\omega_k$  值呢？通常的办法是取偶数个采样频率，最低的频率是 0（当  $\omega = 0$ ， $Z = e^{i0} = 1$ ），无须考虑  $\omega = 2\pi$  那样的高频，因为由 (1-3-1) 知  $\omega = 0$  和  $\omega = 2\pi$  时  $B(e^{i\omega})$  的值相同。在这样的范围内 ( $0 \leq \omega < 2\pi$ )，等间隔地选取频率，就得到

$$\omega_k = \frac{(0, 1, 2, \dots, M-1) 2\pi}{M} \quad (1-3-2)$$

其中， $M$  是某个整数。往后把  $B(e^{i\omega_k})$  简写成  $B_k$ 。

对于  $N$  个点 ( $N = 4$ ) 的时间函数，(1-3-1) 式可以用矩阵乘法来表示

$$\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^0 \\ 1 & W^3 & W^0 & W^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (1-3-3)$$

其中  $W = e^{2\pi i / N}$  (1-3-4)

在计算 (1-3-3) 中, 选  $N = M$  只是为了方便, 并不是本质性的限制。因为一般说来, 在将时间函数送入 (1-3-3) 以前, 可以给时间函数添一些 0。选定  $N = M$  时, 方便在于 (1-3-3) 的矩阵是方阵, 且有精确的逆。事实上, (1-3-3) 的逆很容易表示成

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 1/N \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/W & 1/W^2 & 1/W^3 \\ 1 & 1/W^2 & 1/W^4 & 1/W^0 \\ 1 & 1/W^3 & 1/W^0 & 1/W^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \quad (1-3-5)$$

由于  $1/W$  是  $W$  的复共轭, (1-3-3) 和 (1-3-5) 两个矩阵也互为复共轭。事实上, 从数学上讲, 时间函数与频率函数没有根本的区别。这种“对偶性”, 如果在 (1-3-3) 和 (1-3-5) 中都取标度因子  $N^{-1/2}$ , 而不是分别为 1 和  $N^{-1}$  的话, 就显得更完全了。还可看到, 前一节助记图表也说明时间函数和频率函数是互换的。实际上, 早就知道, 两个频率函数的积相当于两个时间函数的褶积。其对偶命题为: 两个时间函数的积, 相当于两个频率函数的褶积。这在数学上和系统理论上都是很普通的事实, 所以, 不必对“对偶性”加以证明了。但要求读者记住, 任何定理中, 时间和频率都是可以互换的。

在变换  $B_k (k = 0, 1, \dots, M-1)$  的作图中, 频率轴

范围为  $0 \leq \omega_k < 2\pi$ 。但在区间  $-\pi \leq \omega < \pi$  中显示, 则更为自然。由于变换以  $2\pi$  为周期, 所以, 在显示中,  $B_k$  在  $\pi \leq \omega < 2\pi$  间的值完全可以移到  $-\pi \leq \omega < 0$  中去。

因此, 可以画出  $N = 8$  的图

$$B_4 B_5 B_6 B_7 B_0 B_1 B_2 B_3$$

它对应的  $\omega$  值为  $-\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0,$

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi。$$

按这种间隔显示的一个好处是, 对于时间采样足够密的连续时间系列, 变换值  $B_k$  在两端是很小的。如果时间系列是实数, 则  $B_k$  的实部对于  $B_0$  为偶对称; 虚部对于  $B_0$  为奇对称。因而, 显示其一半值就可以了。选择  $N$  为奇数值, 可以使  $\omega = 0$  恰好落在区间正中。但读者一定立即要问, 为什么我们却取偶数个数据点呢?

(1-3-3) 中矩阵与向量相乘的运算需要作  $N^2$  次乘加。下面我们将介绍一个巧妙的方法, 叫作快速付里叶变换, 它只要作  $N \log_2 N$  次乘加就可完成矩阵乘。例如, 由于  $\log_2 1024$  是 10, 可见计算量的节省是很惊人的。

快速付里叶变换中, 基本做法叫“倍合”。若给定系列  $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  和它的采样的付里叶变换  $(X_0, X_1, \dots, X_{N-1})$  及另一系列  $(y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$  和它的采样的付里叶变换  $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1})$ , 就可求得交叉的双倍长度系列

$$z_t = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_{N-1}, y_{N-1})$$

的变换。在作快速付里叶变换的计算过程中, 这种“倍合”要进行多次。从“倍合”的意思就可看出, 假如  $N$  是 2 的整

数幂就方便了。如  $N = 8 = 2^3$ ，先把八个点的系列  $x_0, x_1, \dots, x_7$  分成八个不同的系列（单点系列），然后，对这些单点系列作变换。接着，作四次“倍合”，得到4个双点系列  $(x_0, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_6)$  和  $(x_3, x_7)$  的变换。再“倍合”两次，得到两个不同的四点系列  $(x_0, x_2, x_4, x_6)$  和  $(x_1, x_3, x_5, x_7)$  的变换。最后，再作一次“倍合”，即得到原来的八点系列  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_7)$  的变换。

再来研究一下“倍合”过程的细节。

$$\text{令 } V = e^{i2\pi/2N} = W^{1/2} \quad (1-3-6)$$

$$V^N = e^{i\pi} = -1 \quad (1-3-7)$$

两个  $N$  点系列的变换定义如下

$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j V^{2jk} \quad (k=0, 1, \dots, N-1)$$

$$Y_k = \sum_{j=0}^{N-1} y_j V^{2jk} \quad (k=0, 1, \dots, N-1)$$

交叉系列  $z_t = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_{N-1}, y_{N-1})$  的变换

定义如下

$$Z_k = \sum_{l=0}^{2N-1} z_l V^{lk} \quad (k=0, 1, \dots, 2N-1)$$

将其和分成两部分，注意， $X_j$  乘上  $V$  的偶次幂， $Y_j$  乘上  $V$  的奇次幂

$$\begin{aligned} Z_k &= \sum_{j=0}^{N-1} x_j V^{2jk} + V^k \sum_{j=0}^{N-1} y_j V^{2jk} \\ &= X_k + V^k Y_k \end{aligned} \quad (1-3-8)$$

而  $Z_k$  的后一半为

$$Z_k = \sum_{l=0}^{2N-1} z_l V^{lk} \quad (k=N, N+1, \dots, 2N-1)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{2N-1} z_l V^{l(m+N)} \quad (k-N=m=0, 1, \dots, N-1) \\
&= \sum_{l=0}^{2N-1} z_l V^{lm} (VN)^l \\
&= \sum_{l=0}^{2N-1} z_l V^{lm} (-1)^l \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} x_j V^{2jm} - V^m \sum_{j=0}^{N-1} y_j V^{2jm}
\end{aligned}$$

```

SUBROUTINE FORK(LX,CX,SIGNI)
C FAST FOURIER
C
C          LX
CX(K) = SQRT(1/LX) SUM (CX(J)*EXP(2*PI*SIGNI*I*(J-1)*(K-1)/LX))
C          J=1          FOR K=1,2,...,(LX=2**INTEGER)
COMPLEX CX(LX),CARG,CEXP,CW,CTEMP
J=1
SC=SQRT(1./LX)
DO 30 I=1,LX
  IF(I.GT.J) GO TO 10
  CTEMP=CX(J)*SC
  CX(J)=CX(I)*SC
  CX(I)=CTEMP
10 M=LX/2
20 IF(J.LE.M) GO TO 30
  J=J-M
  M=M/2
  IF(M.GE.1) GO TO 20
30 J=J+M
  L=1
40 ISTEP=2*L
  DO 50 M=1,L
    CARG=(0.,1.)*(3.14159265*SIGNI*(M-1))/L/
    CW=CEXP(CARG)
    DO 50 I=M,LX,ISTEP
      CTEMP=CW*CX(I+L)
      CX(I+L)=CX(I)-CTEMP
50 CX(I)=CX(I)+CTEMP
  L=ISTEP
  IF(L.LT.LX) GO TO 40
RETURN
END

```

图 1-8

快速付里叶变换子程序。调用这个程序两次，得回原始数据。头一次调用时，SIGNI 应为 +1；第二次调用时，SIGNI 应为 -1。LX 必须是 2 的幂。



$$\begin{aligned}
 &= X_m - V^m Y_m \\
 Z_k &= X_{k-N} - V^{k-N} Y_{k-N} \\
 &\quad (k = N, N+1, \dots, 2N-1) \quad (1-3-9)
 \end{aligned}$$

### 练习

验证：在  $N \times N$  一般情况下，(1-3-5) 矩阵的确是 (1-3-3) 矩阵的逆。

## 1-4 相位延迟和群延迟

有些滤波器，当信号通过时，要产生剧烈的变化。而有些滤波器对信号却很少甚至没有改变，换能器或记录器便属于后者的范畴。此时，信号的变化只是一些延迟。观察滤波器延迟的一个方法是，输入一个正弦波，将其相位与输出进行比较（如图1-9）。

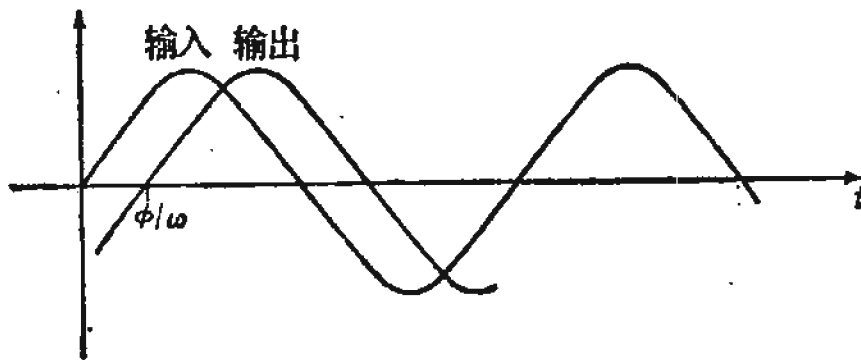


图 1-9

对正弦波  $\sin \omega t$  过滤，其输出是延迟了的正弦波  $\sin(\omega t - \phi)$

若输入是  $\sin \omega t$ ，而输出是  $\sin(\omega t - \phi)$ ，则所谓相位延迟  $t_p$  可如下求得

$$\sin(\omega t - \phi) = \sin \omega(t - t_p)$$

$$\omega t - \phi = \omega(t - t_p)$$

$$t - t_p = \frac{\omega t - \phi}{\omega}$$

$$t_p = \frac{\phi}{\omega}$$

(1-4-1)

一种更有意义的延迟，叫群延迟。它类似于波传播理论中的群速度。实际上，在计算机中，模拟波的传播时，波从  $A$  点传到  $B$  点，可以用一个滤波器来模拟。

有时，在  $A$  点观测到的波形与  $B$  点的不同，但  $A$  点的能量包络与  $B$  点相似，只略有一点延迟。在这种情况下，群速度（能量包络速度）的概念是非常有用的。频率稍有不同的两个余弦波的和将组合成拍。见图1-10。

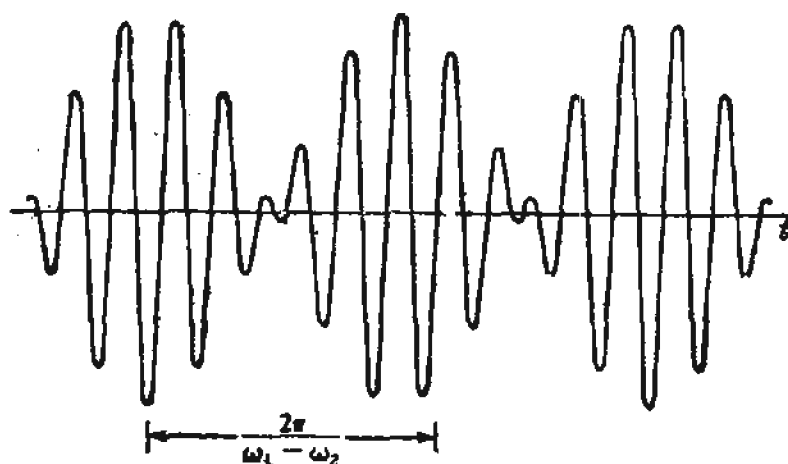


图 1-10

$\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t$  的图形与其平均频率的调幅余弦相象

当这种波形的波通过滤波器时，各个频率都要受到不同延迟，结果使得包络和拍都有了延迟，而这种延迟又不同于原两种频率的相位延迟。包络延迟或群延迟甚至与这两个频率的平均相位延迟也不同。这点，我们可以研究如下：

设输入波形  $x_t$  是

$$x_t = \cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t \quad (1-4-2)$$

根据三角恒等式

$$x_t = 2\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \quad (1-4-3)$$

可见，两个余弦之和与平均频率的余弦乘上频差的 $\frac{1}{2}$ 的余弦相同。由于取的两频率很靠近，频差因子反映了平均频率幅值是缓慢的变化。

再设滤波器的输出是  $y_t$

$$y_t = \cos(\omega_1 t - \phi_1) + \cos(\omega_2 t - \phi_2) \quad (1-4-4)$$

对于 (1-4-4) 的输出，我们假定频率一点没有衰减。若允许两频率有衰减，则问题的讨论就复杂多了。对 (1-4-4)，同样利用三角恒等式，得

$$y_t = 2\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \quad (1-4-5)$$

用时间延迟  $t_g$  的形式，改写其拍因子，得

$$\cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}(t - t_g)\right] = \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

$$(\omega_1 - \omega_2)t_g = \phi_1 - \phi_2$$

故群延迟为

$$t_g = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{\Delta\phi}{\Delta\omega} \quad (1-4-6)$$

实际上，一般并不存在两个纯单频的余弦，而只有某个频率范围的余弦。群延迟是一个用  $t_g = d\phi/d\omega$  表示的与频率有关的函数，其相角可以通过付里叶变换的虚、实部的比的正切来计算。一般， $\phi(\omega) = \arctan [\text{Im}B(\omega)/\text{Re}B(\omega)]$ 。

为了方便起见，再用复对数来定义。如

$$B = re^{i\phi}$$

$$\ln B = \ln|r| + \ln e^{i\phi}$$

$$= \ln|r| + i\phi$$

$$\phi = \text{Im} \ln B$$

$$t_g = \frac{d\phi}{d\omega} = \text{Im} \frac{d}{d\omega} \ln B(\omega) \quad (1-4-7)$$

$$= \text{Im} \frac{1}{B} \frac{dB}{d\omega}$$

当  $B$  在计算机中采样时， $t_g$  的近似值为

$$t_g \approx \frac{2}{\Delta\omega} \text{Im} \frac{B_{k+1} - B_k}{B_{k+1} + B_k} \quad (1-4-8)$$

波传播理论中，一个重要课题是区别相位速度与群速度，这与相位延迟和群延迟情况相类似。例如，当波沿二维平面传播时，相位函数可以这样给出

$$\phi(x, y) = k_x(x - x_0) + k_y(y - y_0) \quad (1-4-9)$$

其中， $(x_0, y_0)$  是滤波器输入的位置， $(x, y)$  是观测相位的位置（即滤波输出的位置）。符号  $k_x$  和  $k_y$  表示空间频率，其中， $k_x$  是  $2\pi$  除以  $x$  轴方向测得的波长。理论物理的方法，可提供  $\omega$ 、 $k_x$  和  $k_y$  间的关系，常可明显地用下列形式给出

$$\omega = \omega(k_x, k_y) \quad (1-4-10)$$

由于速度是距离除以时间，所以，定义沿  $X$  轴的相位速度如下

$$(V_{\text{相位}})_x = \frac{x - x_0}{\text{相位延迟}} = \frac{x - x_0}{\phi/\omega} = \omega/k_x$$

群速度的  $x$  分量

$$(V_{\text{群}})_x = \frac{x - x_0}{\text{群延迟}} = \frac{x - x_0}{d\phi/d\omega} = (x - x_0) \frac{d\omega}{d\phi} \quad (1-4-11)$$

若  $y = y_0$ , 则 (1-4-9) 便简化成

$$\phi = k_x(x - x_0)$$

因此

$$\frac{\partial k_x}{\partial \phi} = \frac{1}{x - x_0}$$

结合 (1-4-11) 便得

$$(V_{\text{群}})_x = (x - x_0) \frac{\partial \omega}{\partial \phi} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \quad (1-4-12)$$

所以, 群速度向量为  $(\partial \omega / \partial k_x, \partial \omega / \partial k_y)$ 。然而, 有时物理关系很复杂, 而得不到象 (1-4-10) 那样的显式, 为此, 只好用复杂的隐关系式, 即  $0 = F(\omega, k_x, k_y)$ 。此时, 用求隐函数的偏微商的公式, 得

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_x} = - \frac{\partial F / \partial k_x}{\partial F / \partial \omega}$$

在地球物理观测解释中, 所涉及到的速度经常是群速度, 能量团就是按此速度传播。在图 1-11 所示的例中, 有大量的“噪音”(这在物理勘测中是常见的), 可以看到, 振动开始是长周期的振荡, 然后是较短周期的振荡。群速度可以通过距离除以旅行时得到。通过两个相距近的测点的观测, 量出某振幅零点的时间延迟, 可以求得相位速度, 为什么两个测点距离要近呢? 目的是使波形变化是稳定的, 若测点相距太远, 就不好作振幅零点的比较。

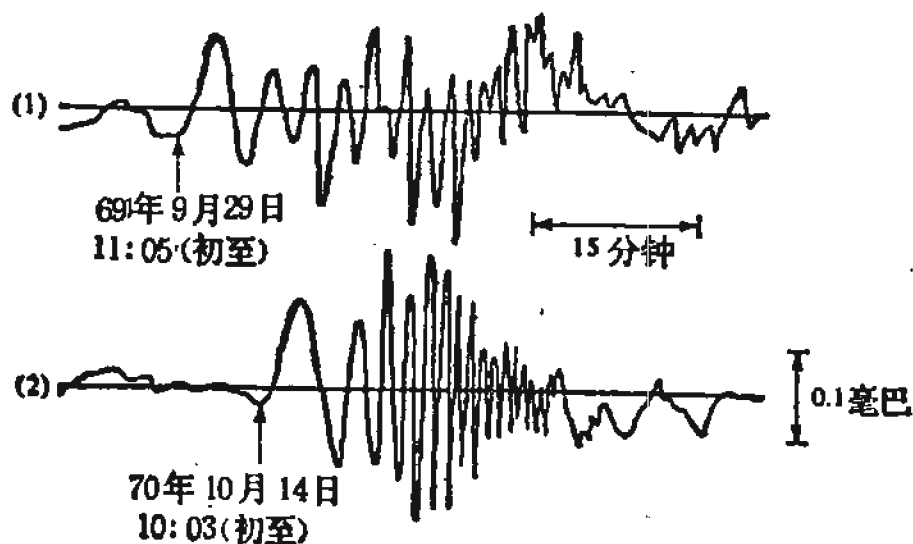


图 1-11

### 1-5 相关和谱

一个时间函数的谱,是该函数的付里叶变换的模的平方。对于实函数,它的付里叶变换有一个偶实部  $RE$  和一个奇虚部  $IO$ ,取其模的平方,就有

$$(RE + iIO)(RE - iIO) = (RE)^2 + (IO)^2$$

偶函数的平方显然仍是偶函数,而奇函数的平方也是偶函数。因此,一个实时间函数的谱总是偶函数,它在正频率的函数值与在负频率的函数值相对称,也就是说,对它讨论负频没有多大意义。

虽然,应用中多数时间函数是实函数,但是,丢开复值时间函数来讨论相关和谱,在数学上是不完全的,何况复值时间函数在研究有关转动的许多物理问题中确实是非常有用的。例如,研究两个向量分量的风速计,它的一个分量指北,记为  $n_t$ ,另一个分量指西,记为  $w_t$ 。若构成一个复值时间序列  $v_t = n_t + iw_t$ ,则复数的模和相角都有明确的物理解释。变换的  $(RE + iIO)$  部分相应于  $n_t$ ,而  $(RO + iIE)$  部分相

应于  $w_t$ 。谱为  $(RE + RO)^2 + (IE + IO)^2$ ，它既非偶函数，也非奇函数。不等式  $V(+\omega) \neq V(-\omega)$  必有某种解释，确也如此，这种不等关系意味着： $+\omega$  对应逆时针方向的转动，而  $-\omega$  对应顺时针方向。为了说明这一点，假定  $n_t = \cos(\omega_0 t + \phi)$ ， $w_t = -\sin(\omega_0 t + \phi)$ ，则  $v_t = e^{-i(\omega_0 t + \phi)}$ ，变换是

$$v(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega_0 t + \phi)} \cdot e^{i\omega t} dt \quad (1-5-1)$$

$$= \delta(\omega - \omega_0) e^{-i\phi} \quad (1-5-2)$$

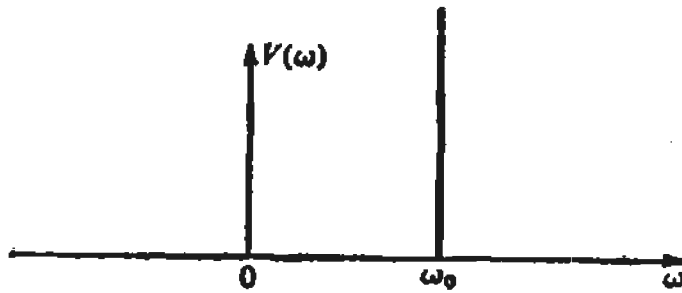


图 1-12

复时间序列  $e^{-i(\omega_0 t + \phi)}$  的谱

谱  $\delta^2(\omega - \omega_0)$  见图1-12。反之，若  $w_t$  是  $\sin(\omega_0 t + \phi)$ ，则谱为点  $-\omega_0$  的  $\delta$  函数，即风速向量换了一个方向。地球物理中的复时间系列的其它例子还有：

1) 弹性地壳受月球的重力吸引，产生局部的大地偏斜，南北向偏斜以时间序列  $x_t$  表示，东西向偏斜以  $y_t$  表示，那么， $x_t + iy_t$  在南北两半球有相反的旋转方向。

2) 地震仪的垂直方向的和水平方向的运动，构成一个复时间系列。

3) 地球的形状轴对于角动量轴的章动 (Chandler wobble)。

4) 电磁波的旋转偏振。

下面讨论用  $Z$  变换表示谱。设谱为  $R(\omega)$ ，

$$R(\omega) = |B(\omega)|^2 = \overline{B(\omega)} B(\omega) \quad (1-5-3)$$

以三点的  $Z$  变换为例

$$R(\omega) = (\bar{b}_0 + \bar{b}_1 e^{-i\omega} + \bar{b}_2 e^{-i2\omega}) (b_0 + b_1 e^{i\omega} + b_2 e^{i2\omega}) \quad (1-5-4)$$

$$R(Z) \bullet = \left( \bar{b}_0 + \frac{\bar{b}_1}{Z} + \frac{\bar{b}_2}{Z^2} \right) (b_0 + b_1 Z + b_2 Z^2) \quad (1-5-5)$$

$$R(Z) \bullet = \bar{B} \left( \frac{1}{Z} \right) B(Z) \quad (1-5-6)$$

为了求取  $R(Z)$  的系数, 需要将多项式  $\bar{B} \left( \frac{1}{Z} \right)$  乘以  $B(Z)$

$$R(Z) = \frac{\bar{b}_2 b_0}{Z^2} + \frac{(\bar{b}_1 b_0 + \bar{b}_2 b_1)}{Z} + (\bar{b}_0 b_0 + \bar{b}_1 b_1 + \bar{b}_2 b_2) + (\bar{b}_0 b_1 + \bar{b}_1 b_2) Z + \bar{b}_0 b_2 Z^2 \quad (1-5-7)$$

$$R(Z) = \frac{r_{-2}}{Z^2} + \frac{r_{-1}}{Z} + r_0 + r_1 Z + r_2 Z^2 \quad (1-5-8)$$

$Z^k$  的系数  $r_k$  为

$$r_k = \sum_i \bar{b}_i b_{i+k} \quad (1-5-9)$$

(1-5-9) 称为自相关公式。滞后 10 个单位时间的自相关值是  $r_{10}$ , 这是  $b_1$  与其自身作了 10 个单位时间的时移后的相似程度的一种度量。最常出现的一种情况是,  $b_1$  是实数, 从

(1-5-7) 或 (1-5-9) 可见, 自相关系数是实数, 且  $r_k = r_{-k}$ 。对于实时间序列, 有

● 原书误为:  $B(\omega)$



$$R(Z) = r_0 + r_1 \left( Z + \frac{1}{Z} \right) + r_2 \left( Z^2 + \frac{1}{Z^2} \right) \quad (1-5-10)$$

$$R(\omega) = r_0 + r_1 (e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + r_2 (e^{i2\omega} + e^{-i2\omega}) \quad (1-5-11)$$

$$= r_0 + 2r_1 \cos \omega + 2r_2 \cos 2\omega \quad (1-5-12)$$

$$= \sum_k r_k \cos k\omega \quad (1-5-13)$$

$$R(\omega) = r_k \text{ 的余弦变换} \quad (1-5-14)$$

这样，我们就证明了一个对连续时间较难证明的定理，即，一时间序列的自相关的余弦变换等于该时间序列的付里叶变换的幅值的平方（本书中，复数的幅值即模，幅角有时称为相位）。计算谱有两种方法：（1）先由(1-5-9)计算 $r_k$ 系数，然后，求取余弦和(1-5-13)；（2）求取 $B(Z)$ 在单位圆上的某些值，并将这些值乘以各自的复共轭。第二种方法最简单，因为可以用快速付里叶变换。

自相关和谱的概念，很容易推广到互相关和互谱。对于 $A(Z)$ 和 $B(Z)$ 两个 $Z$ 变换，它们的互谱 $C(Z)$ 定义为

$$C(Z) = \overline{A} \left( \frac{1}{Z} \right) B(Z) \quad (1-5-15)$$

如果 $C(Z)$ 中，某个系数 $c_k$ 大于任何其它系数，那么，可以说，当 $a_t$ 和 $b_t$ 中有一个相对于另一个滞后了 $k$ 个时间单位后，则波形 $a_t$ 与波形 $b_t$ 最相似。

### 练习

1. 假如一个子波是由复数组成的，则自相关系数 $r_k = r_{-k}$ 还成立吗？此时 $r_k$ 是实数还是复数？ $R(\omega)$ 取实值还是复值？

2. 若 $x_t$ 是一个实的时间函数， $y_t = x_{t+s}$ 是另一个实

时间函数, 请画出互谱  $X\left(-\frac{1}{Z}\right)Y(Z)$  的相位函数 (对于频率)。用计算机计算时, 所有的反正切置于主象限  $-\pi/2 < \arctan < \pi/2$  中, 标上轴的刻度。

3. 将时间和频率的概念互换一下, 问谱的意思变成了什么呢?

### 1-6 希尔伯特变换

将正弦波转换为余弦波的滤波器称为  $90^\circ$  相移滤波器, 或叫转象差滤波器。在特殊情况下, 若输入是  $\cos(\omega t + \phi_1)$ , 则输出应为

$$\cos(\omega t + \phi_1 + \pi/2)$$

这种滤波器在作时间函数的包络时用到。现今  $X(Z)$  是一个实数据序列的  $Z$  变换,  $Q(Z)$  是一个转象差滤波器, 又令  $Y(Z) = Q(Z)X(Z)$  是转象差滤波的输出, 则时间函数的包络可以定义为

$$e_t = (x_t^2 + y_t^2)^{1/2}$$

这样, 就可构成复时间函数  $u_t = x_t + iy_t$ 。用  $Z$  变换表示, 得

$$U(Z) = [1 + iQ(Z)]X(Z)$$

$u_t \overline{u_t}$  表示平方包络函数。同样, 相位  $\phi_t$ , 作为时间的函数, 可定义为  $\phi_t = \arctan(y_t/x_t)$ , 瞬时频率是  $d\phi/dt$ , 这可以用下列方法近似

$$\phi_t = \text{Im} \ln u_t$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \text{Im} \frac{1}{u} \frac{du}{dt} \approx \text{Im} \frac{2}{\Delta t} \frac{u_t - u_{t-1}}{u_t + u_{t-1}}$$

在我们对90°相移滤波器的用途略有了解之后，现在来求  $q_t$  的数值。对时间的微商运算就具有所要的90°相移的特征。但微分算子有个缺点，高频比低频放大得多。具体说来

$$f(t) = \int F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\frac{df}{dt} = \int -i\omega F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

由此可见，时间微分相应于在频率域中多了个权因子  $(-i\omega)$ 。权因子  $-i\omega$  的相位倒符合要求，但其幅值不对头。所需的权因子应是  $Q(\omega) = -i\omega/|\omega|$ ，这便是图1-13所示的阶梯函数。

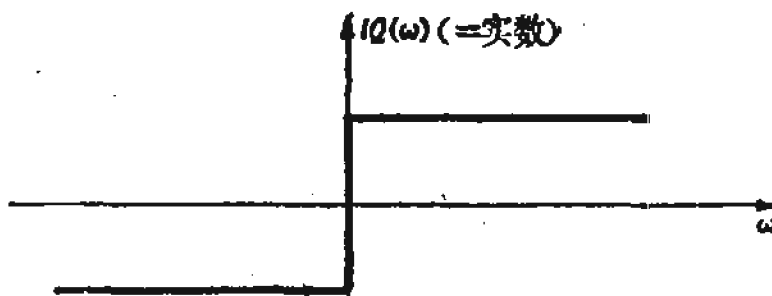


图 1-13

90°相移滤波器的频率响应

把  $Q(\omega)$  变换到时间域，得

$$q_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(\omega) e^{-i\omega n} d\omega$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{-i\omega n} d\omega - \frac{i}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-i\omega n} d\omega$$

$$= \frac{i}{2\pi} \left( \frac{e^{-i\omega n}}{-in} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{e^{-i\omega n}}{-in} \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ -2/\pi n & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

其结果如图1-14所示。

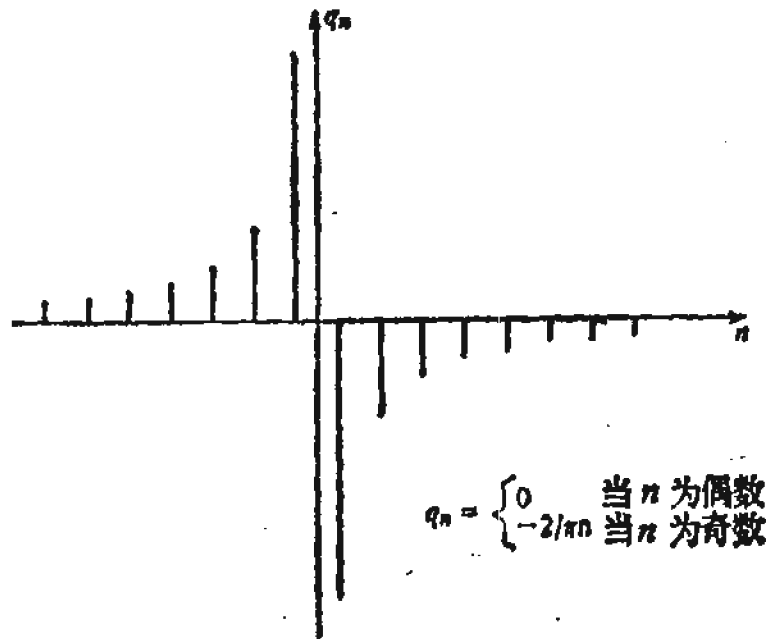


图 1-14

转象差滤波器

由于对于  $-n$ ，滤波器不为 0，这显然是一种物理上不可实现的滤波器（它要用以后的输入形成当前的输出）。如果只讨论连续时间而不是采样时间，则滤波器便是  $1/t$  的形式。这是一个在  $t=0$  处有奇异点的函数，并且在  $+t$  的积分是发散的。因此，与滤波器系数  $q_n$  的褶积是很难实现的，因为无穷序列下降得很慢。与滤波器  $q$  的褶积叫作希尔伯特变换。

再回到前面讲过的滤波器  $1 + iQ(Z)$ 。如图1-15所示，这种滤波器在频率域只是一阶梯函数，达到  $90^\circ$  相移运算的一种简单方法是在频率域中对它作运算。从  $x_t + i \cdot 0$  出发，将它转换为频率域，然后乘上图1-15的阶梯函数，最后，进

行逆变换，得到 $x_t + iy_t$ 。图1-16详细地列出了偶部、奇部、实部和虚部的变换过程。

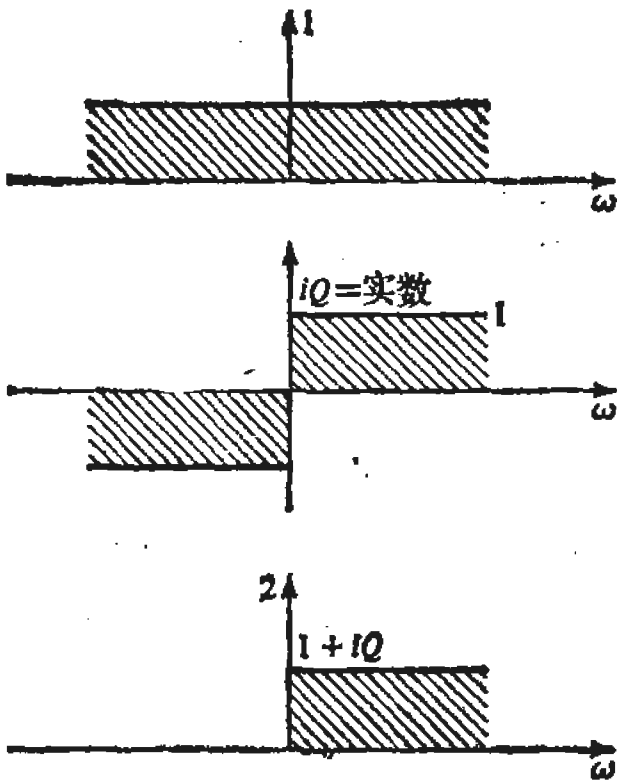


图 1-15

滤波器  $1 + iQ$  ( $Z$ ) 在频率域是实的、单边的，而在时间域中是复的，且是双边的。

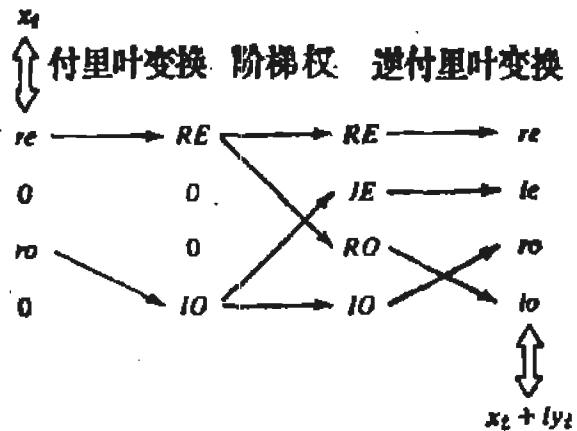


图 1-16

用频率域中的阶梯权作希尔伯特变换或转象差滤波

函数  $1 + iQ$  在时间序列分析理论中起着特殊的作用，在以后的章节中，将说明它是与因果律原理有关的。为了便于以后参考，将此函数的特性总括在图1-17中列出。

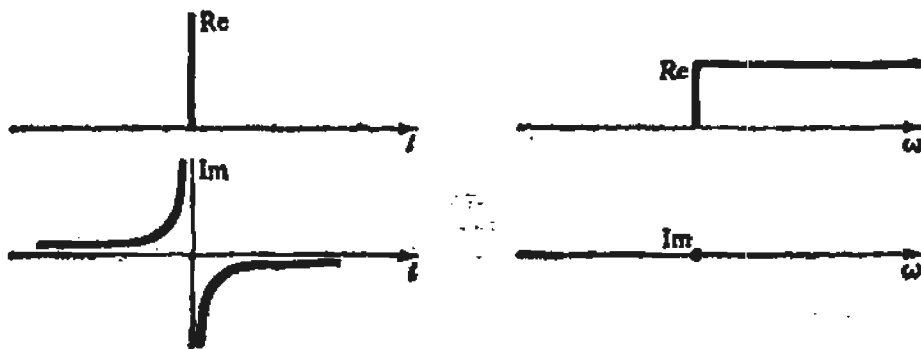


图 1-17

脉冲  $i$  乘以  $90^\circ$  相移滤波器便成为频率域的一个实阶梯函数

### 练习

1. 用部分分式, 作波形  $(2/\pi)$   $(\dots, -\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, 0, -1, 0, 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \dots)$  与其自身的褶积, 其结果是  $(\dots, 0, 0, -1, 0, 0, \dots)$ , 如何解释?

(提示:  $\pi^2/8 = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$ )

2. 用快速付里叶变换矩阵的表示方法, 转象差滤波器  $Q(\omega)$  可表示成列向量

$$-i(0, 1, 1, 1, \dots, 0, -1, -1, -1, \dots, -1)^T$$

将它乘进逆变换矩阵, 证明: 这个变换与  $(\cos \pi k/N)/(\sin \pi k/N)$  成正比。问其比例因子是什么? 画出它在  $k \ll N$  即极限  $N \rightarrow \infty$  的图。

[提示:  $1 + x + x^2 + \dots + x^N = (1 - x^{N+1})/(1 - x)$ ]

## 第2章 单边函数

所有物理系统都具有一种性质：即在它们受激之前，自然不会响应。所以，任何物理系统的脉冲响应都是单边函数（ $t = 0$  之前，函数值为零）。在系统理论中，这种滤波函数称为物理上可实现的。在波的传播中，这个性质就是因果律：在波还没有传播之前，不会有波到达。这里，起时点  $t = 0$  起着特别重要的作用。因此，许多费解的问题，用采样时间显然比用连续时间更容易了解。当一个滤波器仅在起时点  $t = 0$  及其以后有响应时，我们就说这个滤波器是物理可实现的，或表因的。“表因”这个词，从物理上讲是合适的，因为应力可以引起瞬间拉伸，反之亦然。但是，当用滤波理论来描述经济或社会问题时，就把“表因”这个词转换为更加确切的“可实现的”或“单边”这样的意思，因为此时因果关系不太明显。

### 2-1 反滤波

为了更好地了解表因滤波器，我们提出从表因滤波结果恢复其输入函数的任务，即所谓反滤波问题。参看图2-1，滤波器  $b_t$  的输出  $y_t$  为已知，而输入  $x_t$  为未知。这是在换能器、记录器系统经常遇到的一个问题。例如，地震仪的输出是在纸上绘出的一条弯弯曲曲的线，地震人员就要根据这种曲线确定大地的位移、速度或加速度。为了进行滤波器  $B(Z)$  的反滤波运算，我们要设法求出如图2-2所示的另一个滤波器

$A(Z)$ 。

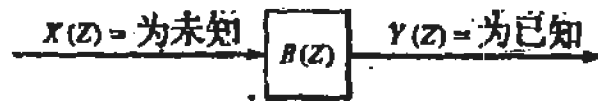


图 2-1

有时滤波器的输入是未知的

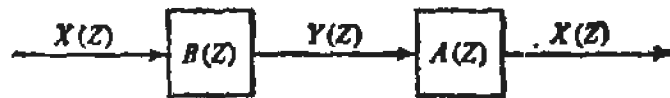


图 2-2

$A(Z)$  是滤波器  $B(Z)$  的反(逆)滤波器

为了求滤波器  $A(Z)$  的系数,只要在恒等式  $B(Z)A(Z) = 1$  中,比较  $Z$  的各次幂的系数就可得出。若  $B(Z)$  是三项滤波器

$$(a_0 + a_1Z + a_2Z^2 + a_3Z^3 + \dots)(b_0 + b_1Z + b_2Z^2) = 1 \tag{2-1-1}$$

(2-1-1) 中,  $Z^0$ 、 $Z^1$ 、 $Z^2$ ...的系数分别是

$$a_0b_0 = 1 \tag{2-1-2}$$

$$a_1b_0 + a_0b_1 = 0 \tag{2-1-3}$$

$$a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0 \tag{2-1-4}$$

$$a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 = 0 \tag{2-1-5}$$

$$a_4b_0 + a_3b_1 + a_2b_2 = 0 \tag{2-1-6}$$

.....

$$a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + a_{k-2}b_2 = 0 \tag{2-1-7}$$

于是,可从 (2-1-2) 通过  $b_0$  求得  $a_0$ ; 从 (2-1-3) 通过  $a_0$  和  $b_k$  求得  $a_1$ ; 从 (2-1-4) 通过  $a_1$ 、 $a_0$  和  $b_k$  求得  $a_2$ 。同样,在一般情况下,  $a_k$  可以通过  $a_{k-1}$ 、 $a_{k-2}$  和  $b_k$  求得。特别是



从 (2-1-7) 中,  $a_k$  可以递推确定

$$a_k = \frac{-\sum_{i=1}^2 a_{k-i} b_i}{b_0} \quad (2-1-8)$$

例如, 当  $B(Z) = 1 - Z/2$ , 那么, 运用 (2-1-2) ~ (2-1-7) 各式, 根据二项式定理, 通过多项式除法, 或台劳幂级数公式, 可得

$$A(Z) = \frac{1}{1 - Z/2} = 1 + Z/2 + Z^2/4 + Z^3/8 + \dots \quad (2-1-9)$$

我们知道, 滤波器的系数有无穷多个, 然而, 它们的值递降很快, 因此, 在计算机中作近似表示是没有问题的。但是, 对滤波器  $B(Z) = 1 - 2Z$ , 情况却不那么乐观, 此时

$$A(Z) = \frac{1}{1 - 2Z} = 1 + 2Z + 4Z^2 + 8Z^3 + 16Z^4 + 32Z^5 + \dots \quad (2-1-10)$$

此级数的系数是无限递增的。滤波器  $A(Z)$  的输出取决于输入, 输入越靠后, 输出越大 [ $A(Z)$  的当前输出等于  $a_0$  乘以当前输入  $x_t$ , 加上  $a_1$  乘前一个输入  $x_{t-1}$ , 等等。所以, 用到  $a_n$  时, 表示已过了几个时间单位]。这说明, 有些滤波器  $B(Z)$ , 不能从 (2-1-2) 至 (2-1-8) 得到合用的有限近似反滤波器  $A(Z)$ 。那么, 现在我们要探索用好的滤波器来替代不好的滤波器的方法。考虑一个双脉冲滤波器, 要求  $B(Z)$  中的第一个脉冲大于第二个脉冲。从求  $B(Z)$  的根而求出符合  $B(Z_0) = 0$  的  $Z_0$  值的过程, 可对问题得到较好的数学上的说明。例如,  $B(Z) = 1 - Z/2$ , 可解得  $Z_0 = 2$ , 而  $B(Z)$

$= 1 - 2Z$  时,  $Z_0 = \frac{1}{2}$ 。对于普通的复系数的子波, 若  $B(Z_0) = 0$  的  $Z_0$  值在  $Z$  平面的单位圆内, 则  $1/B(Z)$  的系数是递增的; 而若在单位圆外, 则其倒数  $1/B(Z)$  是有界的。

前面讨论过,  $N$  次多项式  $B(Z)$ , 可以作因式分解化为  $N$  个子系统, 而且, 各个子系统都是一阶的 (见图 2-3)。有人以为, 若  $B(Z)$  的  $N$  个根全在单位圆内, 求  $A(Z)$  就困难了。复变函数论中关于绝对收敛级数的定理可说明这一点, 这个定理是: 绝对收敛级数的积是收敛的, 而收敛级数与发散级数的积是发散的。也可用另一方法说明这一点:  $1/B(Z)$  幂级数在以原点至第一个极点的距离为半径的圆内收敛。 $A(Z)$  在单位圆上收敛的意思是, 用滤波的术语讲,  $A(Z)$  的系数是递减的。因此, 若全部  $B(Z)$  的零点都在单位圆外, 那么, (2-1-8) 便是一个收敛的滤波器。

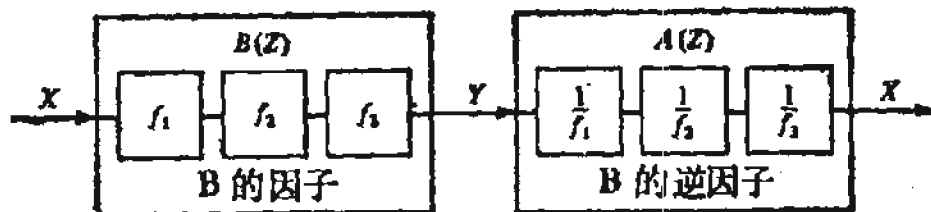


图 2-3

将多项式  $B(Z)$  作因式分解, 便将滤波器分解成许多双项滤波器, 每个双项滤波器都应有一个有界的反滤波器。

那么, 若有一个或多个根在单位圆内时, 也照样可以进行吗? 让我们举例来回答。

$$\frac{1}{1-2Z} = -\frac{1}{2Z} \frac{1}{1-1/2Z}$$

$$= -\frac{1}{2Z} \left[ 1 + \frac{1}{2Z} + \frac{1}{(2Z)^2} + \dots \right] \quad (2-1-11)$$

(2-1-11) 是按  $1/Z$  的正幂展开的, 即在无穷远点的台劳展开。它在以原点为中心以  $\frac{1}{2}$  为半径的圆外 (包括  $Z = \infty$ ) 收敛。这说明, 若  $B(Z)$  系数是有界的, 其倒数必在单位圆上收敛。用滤波的术语来讲, 就是说这种反滤波器必定是一个响应将来的输入的滤波器, 所以, 物理上是不可实现的, 但是, 用计算机模拟是可以的。

一般情况下, 必须将  $B(Z)$  作因式分解, 分成两部分:  $B(Z) = B_{\text{外}}(Z)B_{\text{内}}(Z)$ , 其中,  $B_{\text{外}}(Z)$  仅在单位圆外有根,  $B_{\text{内}}(Z)$  仅在单位圆内有根。 $B_{\text{外}}$  的倒数表为在原点的一个台劳级数,  $B_{\text{内}}$  的倒数表为一个在无穷远点的台劳级数。这样,  $1/B(Z)$  的最后表达式叫作  $1/B(Z)$  的罗朗展开式, 它在单位圆的圆周上收敛。刚好在单位圆上为 0 的情况, 要个别处理。有时, 根在单位圆周上, 求解并不困难; 而有时, 根在圆周的附近, 计算实际上就不能顺利地进行了。

最后, 讨论一种力学上的解释。物体内的应力 (压力) 可以用  $x_t$  来表示, 而它引起的体变用  $y_t$  来表示。下面两个命题是等效的, 即两命题同时为真或同时为假。

命题 A。物体内的应力可以用当前的和过去的体变的线性组合来表示, 同样, 体变可以从当前的和过去的应力推算出来。

命题 B。有关应力至体变及体变至应力的过滤, 所有极点和零点都在单位圆外。

### 练习

1. 求  $(2-5Z+2Z^2)$  的反滤波器。可以舍去  $Z$  的高

次项，但要写出  $Z$  的任意次幂的系数的准确表达式（可用部分分式方法）。画出脉冲响应图。

2. 证明：对离散时间乘以  $(1-Z)$  与对连续时间的微分类似，对离散时间除以  $(1-Z)$  与连续时间的积分也类似。问其积分上下限是什么？

3. 叙述由台劳级数  $B(Z)/A(Z) = C_0 + C_1Z + C_2Z^2 + \dots + C_\infty Z^\infty$  确定  $A(Z)$  和  $B(Z)$  的一般方法，其中， $A(Z)$  和  $B(Z)$  分别是  $n$  和  $m$  次的未知多项式。当  $C(Z) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}Z - \frac{3}{8}Z^2 - \frac{3}{16}Z^3 - \frac{3}{32}Z^4 - \dots$  时，计算  $A(Z)$  和  $B(Z)$ 。不很熟悉行列式的读者，不必做此题。

〔提示：比较  $B(Z) = A(Z)C(Z)$  两边的系数〕

## 2-2 最小相位

在2-1节曾学习过，说  $1/B(Z)$  的台劳级数在  $|Z|=1$  上收敛，等于说  $B(Z)$  在单位圆内无根。下面说明，这两个条件还等价于， $B(Z)$  的相位在单位圆上的某种特性。

下面讨论双项滤波器的相移

$$\begin{aligned} B &= 1 - Z/Z_0 & (Z_0 = \rho e^{i\omega_0}) \\ &= 1 - \rho^{-1} e^{i(\omega - \omega_0)} \\ &= 1 - \rho^{-1} \cos(\omega - \omega_0) - i\rho^{-1} \sin(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

根据定义，相位是虚部与实部之比的反正切。

相位，作为频率的函数，它的图形，对于  $\rho < 1$  和  $\rho > 1$  是很不一样的。图2-4是  $\rho > 1$  的情形。

相位是  $\text{Im}B/\text{Re}B$  的反正切。作相位图最便当的方法是在复  $B$  平面上作，见图2-5。

相位作为频率的函数，见图2-6。可见相位  $\phi$  在  $\omega = 0$

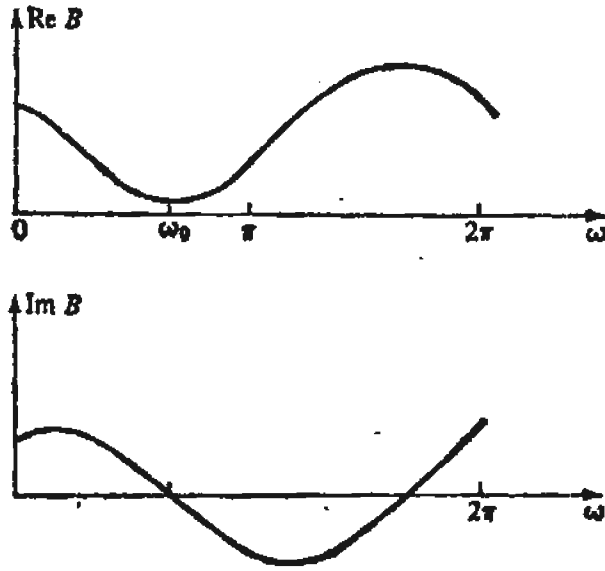


图 2-4

Z 变换  $1 - Z/(1.25e^{i\omega})$  的实部和虚部

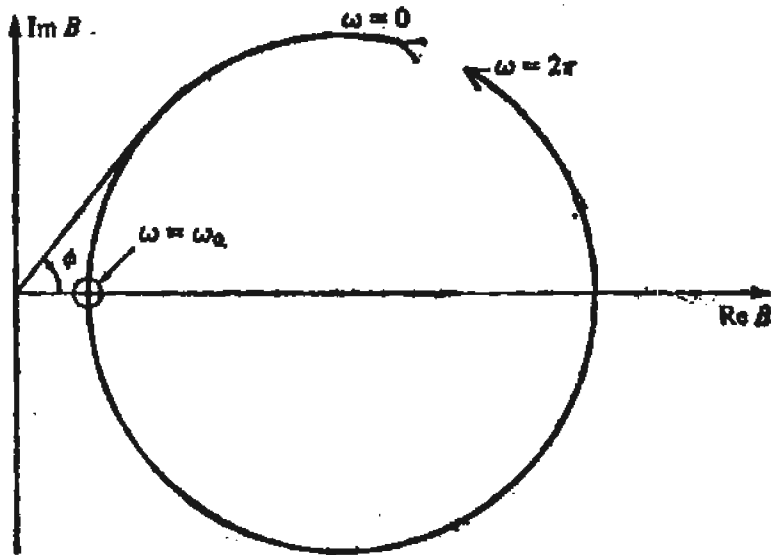


图 2-5

图2-4中的双项滤波器的相位

与在  $\omega = 2\pi$  的值是一样的，这是因为实部和虚部的周期都是  $2\pi$ 。而在单位圆内有一个零点时，即  $\rho < 1$  时，情况就大不相同了。图2-7是其实部和虚部，图2-8是实部和虚部在复平面上的显示。

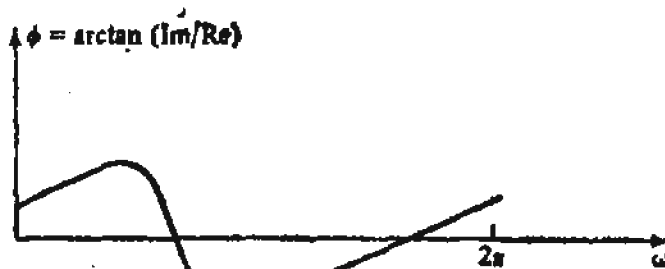


图 2-6

双项最小相位滤波器的相位

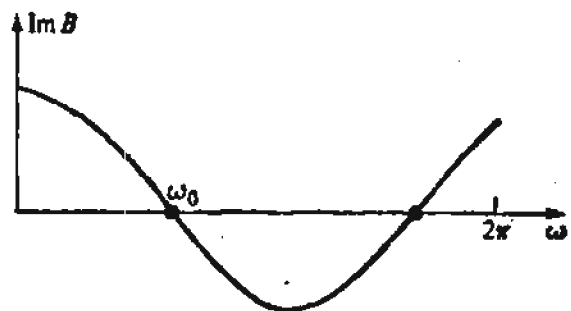
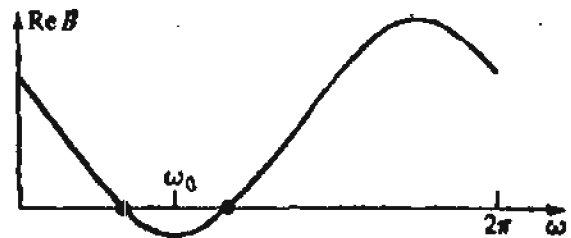


图 2-7

双项非最小相位滤波器

$$1 - 1.25Z e^{-i2\pi/\theta}$$

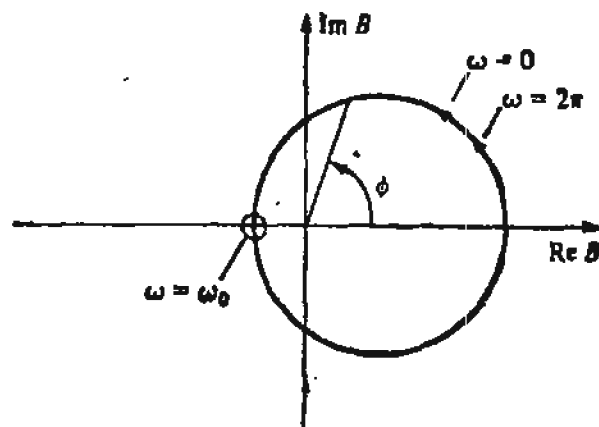


图 2-8

复平面内的相位

$\omega$  从 0 增加到  $2\pi$ , 相位  $\phi$  就增加  $2\pi$ , 因为圆周环绕了原点。相位曲线见图 2-9。于是, 当  $\rho > 1$  时,  $\phi(\omega) = \phi(\omega + 2\pi)$ , 此时, 双项滤波器  $B$  便称为最小相位或最小延迟。

下面我们再讨论一般情形

$$B(Z) = \frac{(Z - c_1)(Z - c_2) \cdots}{(Z - a_1)(Z - a_2) \cdots} \quad (2-2-1)$$

根据复数乘法规则， $B(Z)$  的相位是分子中的相位之和，减去分母中的相位和。因为我们只讨论物理可实现的滤波器，所以，分母的因式必须都是最小相位，分母相位曲线是图2-6那样的曲线之和，而分子各因式不一定是最小相位，分子相位之和可能是图2-6或图2-9那样的曲线之和。如果所有因式都是图2-9那样的，则总相位便与图2-9一样， $\omega = 2\pi$  的相位大于  $\omega = 0$  的相位，此时，滤波器便是非最小相位。

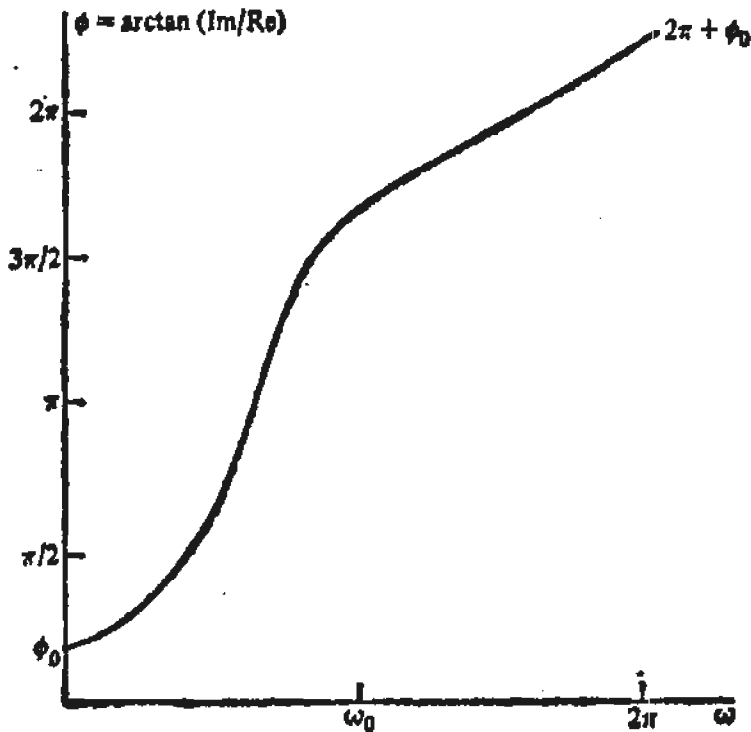


图 2-9

非最小相位两项滤波器的相位

### 2-3 并联滤波器

我们已经知道，滤波器串联时，其结果为滤波器多项式相乘。可以想到，当  $A(Z)$  和  $G(Z)$  两个滤波器并联时，结果则是这两个多项式相加，见图2-10。

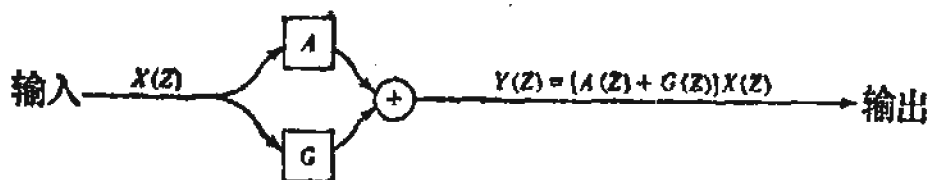


图 2-10  
并联滤波器

当滤波器并联时，它们的  $Z$  变换便相加。我们知道，串联滤波器为最小相位的充分兼必要条件是：乘积中的各个元素都是最小相位，现在我们来研究  $A(Z) + G(Z)$  是最小相位的一个充分条件（不是必要条件）。首先，假定  $A(Z)$  是最小相位，那么我们可以写

$$A(Z) + G(Z) = A(Z) \left[ 1 + \frac{G(Z)}{A(Z)} \right]$$

$A(Z) + G(Z)$  是否最小相位，成为确定  $A(Z)$  和  $1 + \frac{G(Z)}{A(Z)}$  是否都是最小相位的关键问题了。前面已经假定了

$A(Z)$  是最小相位。在讨论  $1 + \frac{G(Z)}{A(Z)}$  是否为最小相位之前，还必须规定它是表因滤波器，由于  $1/A(Z)$  可仅按  $Z$  的正幂展开，那么， $G(Z)/A(Z)$  也是表因的。由此看出， $1 + G(Z)/A(Z)$  为最小相位的充分条件是  $A(Z)$  的谱在所有频率上都大于  $G(Z)$  的谱，即要求对于任何实  $\omega$ ， $|A| > |G|$ 。

因此，若在复平面上绘  $G(Z)/A(Z)$  的曲线，对于  $0 \leq \omega \leq 2\pi$ ，此曲线全都在单位圆内。然后再加 1，即  $1 + G(Z)/A(Z)$ ，此曲线的实部总是正的，见图 2-11。由于曲线不包括原点，所以，必是一最小相位函数的相位。总而言之，“一个最小相位子波掺上不太多的‘渣滓’，仍为最小相位”。这个有点



抽象的定理直接可推出一个物理结果。假如以最小相位 $A(Z)$ 表示的波，从一个震源发射出来，经一段时间之后接收到了，再经一段时间，波经过反射返回来，在接收器上也接收到了。接收器记录了信号 $Y(Z) = A(Z) + Z^n \alpha A(Z)$ ，其中， $n$ 表示波第一次到达至其回声到达之间的延迟时， $\alpha$ 表示反射波的振幅衰减。为了说明 $Y(Z)$ 是最小相位，请注意 $Z^n$ 的模为1，并且，反射系数 $\alpha$ 必须小于1（避免恒动），所以， $Z^n \alpha A(Z)$ 充当了前面出现的 $G(Z)$ 的角色。因此，最小相位的波加上其反射仍是最小相位。往后，还将讨论波在传播中发生多次反射的情形。

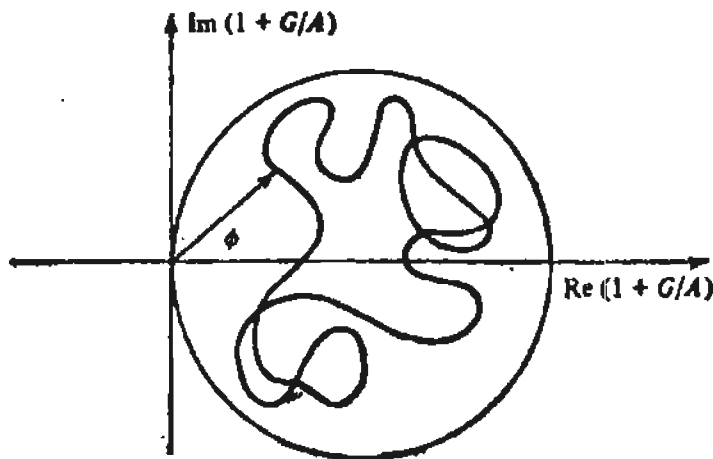


图 2-11

正实函数的相位在 $\pm \pi/2$ 之间

### 练习

1. 列举两个其和为最小相位而本身并非最小相位的子波的例子。

2. 令 $A(Z)$ 是 $N$ 次最小相位多项式，又令 $A'(Z) = Z^N \overline{A(1/Z)}$ ，求复 $Z$ 平面内的 $A'(Z)$ 的根。 $A'(Z)$ 称为最大相位。

[提示：先作简单情况 $A(Z) = a_0 + a_1 Z$ ]

3. 假定 $A(Z)$ 是最小相位，并且， $G(Z)$ 的次数小于

或等于  $A(Z)$  的次数。假定  $|A| > |G|$ 。证明： $A(Z) + G(Z)$  是最小相位。

4. 设  $A(Z)$  是最小相位，问在  $|c| < 1$ 、 $|c| > 1$ 、 $|c| = 1$  的三种情况下， $A(Z) + cZ^N \bar{A}(1/Z)$  的根在哪里？  
(提示：多项式的根是此多项式系数的连续函数)

## 2-4 正实函数

在许多物理问题中，有两种相类似的函数，一种叫导纳函数，另一种叫阻抗函数。在电子学中，它们分别是电流与电压之比和电压与电流之比；在声学中，阻抗是压强与速度之比。在合理的电力网或声区不包含能源的情况下，上述这些比，具有正实函数的性质。为了从力学的例子来了解这种性质，我们可以想象在一个已知力  $F(Z)$  的作用下，观测它所引起的速度  $V(Z)$ 。在滤波理论中，它就象  $F(Z)$  是滤波器  $Y(Z)$  的一个输入，其输出为  $V(Z)$ ，即

$$V(Z) = Y(Z)F(Z) \quad (2-4-1)$$

显然，这种滤波器  $Y(Z)$  是表因的。我们相信，倒过来做也是可以的，即预先给一个速度，而去观测力，所以，必存在一个收敛的表因滤波器  $I(Z)$

$$F(Z) = I(Z)V(Z) \quad (2-4-2)$$

由于  $Y$  和  $I$  是彼此互逆的，而且都是有界的和表因的，那么它们必都是最小相位。

首先，在讨论任何物理问题以前，要注意，若复数  $a + ib$  有一个正的实部  $a$ ，则  $(a + ib)^{-1}$  的实部  $a/(a^2 + b^2)$  也是正的，取  $a + ib$  表示单位圆上  $Y(Z)$  或  $I(Z)$  的一个值，则有这样一个明显的事实：若  $Y$  或  $I$  中的一个有正实性质，则另一个也有。

消耗功率是力与速度之积，即

$$\text{功率} = \dots + f_0 v_0 + f_1 v_1 + f_2 v_2 + \dots \quad (2-4-3)$$

这可以用  $Z$  变换来表达

$$\text{功率} = \frac{1}{2} \text{乘以} [V(1/Z)F(Z) + F(1/Z)V(Z)] \text{的} \\ Z^0 \text{的系数}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [V(1/Z)F(Z) + F(1/Z) \\ V(Z)] d\omega \quad (2-4-4)$$

利用 (2-4-1) 替换  $V(Z)$ ，得

$$\text{功率} = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(1/Z) [Y(1/Z) + Y(Z)] \\ F(Z) d\omega$$

因为  $Z^k$  的系数等于  $Z^{-k}$  的系数，所以， $Y(Z) + Y(1/Z)$  表面上很象一个谱，表明了一个自相关函数的对称性。令

$$R(Z) = Y(Z) + Y(1/Z) \quad (2-4-5)$$

(2-4-4) 便成为

$$\text{功率} = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(Z) F(1/Z) F(Z) d\omega \quad (2-4-6)$$

被积函数是任意一个正的输入力的谱与  $R(Z)$  的乘积，若要使功率消耗对所有频率都是正的（对所有  $F\bar{F}$ ），那么， $R(Z)$  显然对所有频率必须是正的。所以， $R$  的确是一个谱。我们已经知道，对所有频率， $Y(Z) + Y(1/Z)$  必是正的，因而， $Y(Z)$  并不是一个任意的最小相位滤波器， $Y(Z)$  和  $Y(1/Z)$  的实部是

$\text{Re}[Y(Z)] = \text{Re}[Y(1/Z)] = y_0 + y_1 \cos \omega + y_2 \cos 2\omega + \dots$  由于其和的实部必是正的, 显然相等的两部分  $Y(Z)$  和  $Y(1/Z)$  的实部也必定是正的。

如果所研究的物质或机构是无源的 (不含能源), 则从负无穷到任何时间  $t$ , 在任何时间内的功率消耗都是正的。现在来求这种时间门内功率消耗的表达式。为了简化, 设在  $t=0$  之前, 力和速度皆为 0, 令时间门的端点在  $t=2$  和  $t=3$  之间。定义

$$f_t' = \begin{cases} f_t & t \leq 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases} \quad (2-4-7)$$

要求得整个时间里所作的功, 可以如 (2-4-6) 对所有频率作积分; 而若仅要求得所选定的时间门内所作的功, 可以用  $F'$  替代  $F$ , 在所有频率上作积分, 即

$$W_s = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} F'(1/Z) R(Z) F'(Z) d\omega \quad (2-4-8)$$

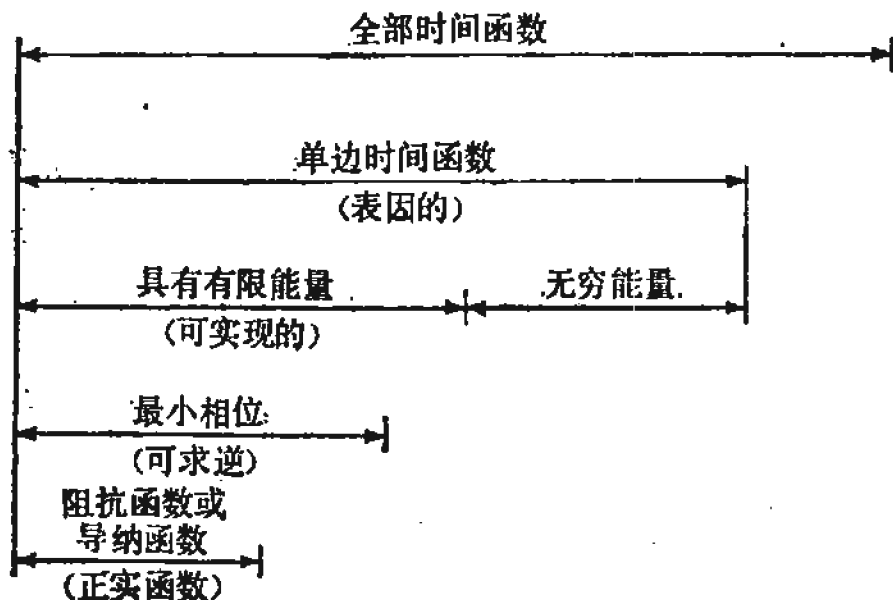


图 2-12

几类重要的时间函数

我们已知道，此积分相当于取被积函数的  $Z^0$  项的系数。现在我们来求它。首先，将  $R(Z)F'(Z)$  中的  $Z$  的幂的系数集中起来。

$$Z^0: r_0 f'_0 + r_1 f'_1 + r_{-2} f'_2$$

$$Z^1: r_1 f'_1 + r_0 f'_1 + r_{-1} f'_2$$

$$Z^2: r_2 f'_0 + r_1 f'_1 + r_2 f'_2$$

要求得  $F'(1/Z)$  [ $R(Z)F'(Z)$ ] 中  $Z^0$  的系数，必须将顶上那排乘以  $f'_0$ ，第二排乘以  $f'_1$ ，第三排乘以  $f'_2$ 。将其结果依次序排列为

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{2} [f_0 \ f_1 \ f_2] \begin{bmatrix} r_0 & r_{-1} & r_{-2} \\ r_1 & r_0 & r_{-1} \\ r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [f_0 \ f_1 \ f_2] \begin{bmatrix} 2y_0 & y_1 & y_2 \\ y_1 & 2y_0 & y_1 \\ y_2 & y_1 & 2y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (2-4-9) \end{aligned}$$

不仅  $3 \times 3$  的二次型 (2-4-9) 必定是正的 (即对任何不全为零的  $f_t$ ,  $W_2 > 0$ )，而且，所有的  $t \times t$  的二次型都必然是正的。

总之，频率域中的正实性质是说，对于任何实  $\omega$ ,  $Y(Z) + Y(1/Z)$  是正的；而在时间域中，正实性质是，所有象 (2-4-9) 那样的  $t \times t$  矩阵都是正定的。图 2-12 总结了我们所讨论过的各类函数。

### 练习

1. 在力学方面，将自由单位质点的力和速度的关系表为  $dv/dt = f$  或  $v = \int_{-\infty}^t f dt$ 。用与 (0.5, 1.0, 1.0, 1.0, ...) 的褶积来近似积分，计算其能量消耗，以频率的函数表达。

(提示: 将  $(1+Z)/2(1-Z)$  按  $Z$  的正幂展开)

2. 举出一个是最小相位但不是正实函数的例子。

## 2-5 窄带滤波器

我们还常常借用滤波器来修改给定的数据的谱。若输入为  $X(Z)$ , 输出为  $Y(Z)$ , 滤波器为  $B(Z)$ , 便有  $Y(Z) = B(Z)X(Z)$  和其付里叶共轭  $\bar{Y}(1/Z) = \bar{B}(1/Z)\bar{X}(1/Z)$ 。此二式相乘, 得

$$\bar{Y}Y = (\bar{B}B)(\bar{X}X)$$

这表示输入的谱乘滤波器的谱等于输出的谱。滤波器的特征, 常常用它们的谱的形状来表示, 图2-13中列举了一些例子。

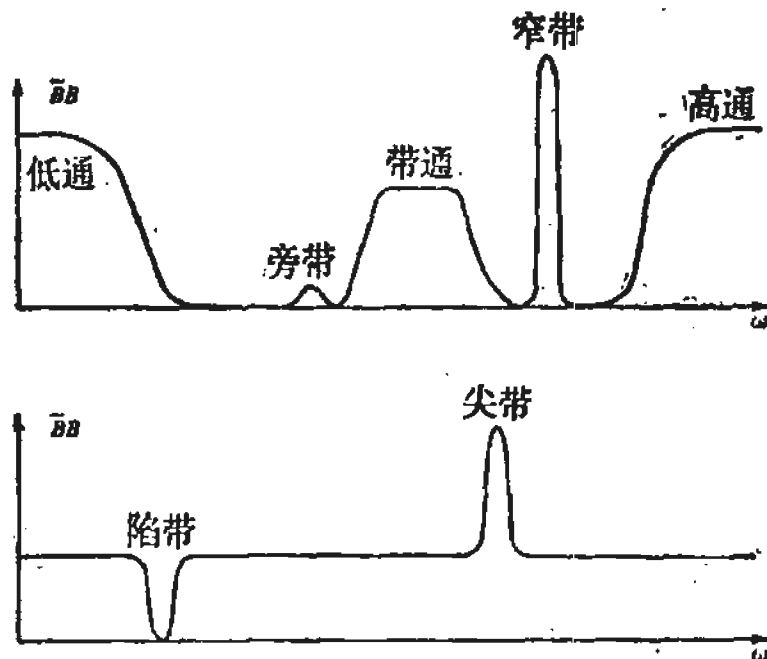


图 2-13

各种滤波器的谱

我们经常遇到正弦时间函数。用  $Z$  变换表示正弦时间函数的简单方法是

$$\frac{1}{1 - Ze^{i\omega_0}} = 1 + Ze^{i\omega_0} + Z^2 e^{i2\omega_0} + \dots \quad (2-5-1)$$

与这个  $Z$  变换相应的时间函数是  $e^{i\omega_0 t}$ 。(2-5-1) 的左边在单位圆上有一个极点；因此，该级数处在收敛和发散间的临界线上。这会造成不理想的情况，但可以通过将极点从单位圆向外移动一个小距离  $\varepsilon$  而予以避免。令  $Z_0 = (1 + \varepsilon)e^{i\omega_0}$ ，记

$$\begin{aligned} B(Z) &= \frac{1}{A(Z)} = \frac{1}{1 - Z/Z_0} \\ &= 1 + Z/Z_0 + (Z/Z_0)^2 + \dots \quad (2-5-2) \end{aligned}$$

在  $t = 0$  之前， $B(Z)$  的时间函数是零，而在  $t = 0$  之后，是  $e^{-i\omega_0 t}/(1 + \varepsilon)^t$ ，这是一个按  $(1 + \varepsilon)^{-t}$  随时间递减的正弦函数，其系数见图2-14。

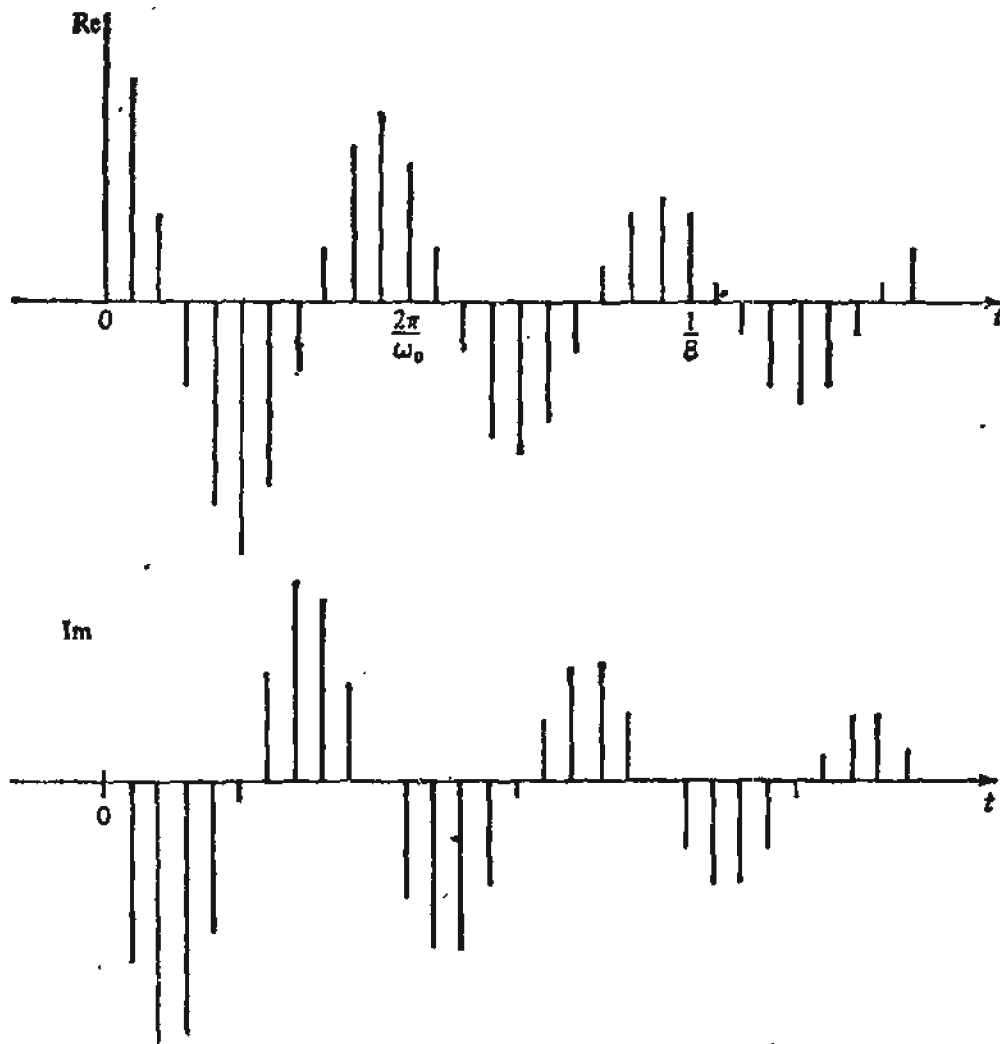


图 2-14

紧靠单位圆外，于  $Z_0 = 1.1e^{i\omega_0}$  有一极点的双项  $Z$  变换的时间函数

很显然 (这在下面还将证明), 与 (2-5-2) 系数作褶积 (见图2-14) 相当于进行窄带滤波运算。若极点选的非常接近单位圆, 则滤波器的通带越窄,  $B(Z)$  的系数下降得越慢。在实际作褶积时, 是需要截尾的, 即舍弃在有限项以后的  $Z$  的各次幂。这说明, 窄带滤波方法远比用  $B(Z)$  系数的褶积方便。这个方法是多项式除以  $A(Z)$ , 例如, 对于输出  $Y(Z)$ , 有

$$Y(Z) = B(Z)X(Z) \quad (2-5-3)$$

$$Y(Z) = \frac{X(Z)}{A(Z)} \quad (2-5-4)$$

(2-5-4) 两边乘以  $A(Z)$ , 得

$$Y(Z)A(Z) = X(Z) \quad (2-5-5)$$

为了确定起见, 假定在  $t = 0$  之前,  $x_t$  和  $y_t$  都为 0。顺次比较  $Z$  的各次幂的系数, 得

$$\begin{aligned} y_0 a_0 &= x_0 \\ y_1 a_0 + y_0 a_1 &= x_1 \\ y_2 a_0 + y_1 a_1 + y_0 a_2 &= x_2 \\ y_3 a_0 + y_2 a_1 + y_1 a_2 + y_0 a_3 &= x_3 \end{aligned} \quad (2-5-6)$$

写成一般等式为

$$y_k a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} y_{k-i} a_i = x_k \quad (2-5-7)$$

$$\text{解出 } y_k \text{ 得} \quad y_k = \frac{x_k - \sum_{i=1}^{\infty} y_{k-i} a_i}{a_0} \quad (2-5-8)$$

只要  $y_{k-1}, y_{k-2} \dots$  已知, 就可用 (2-5-8) 计算  $y_k$ 。解是递推求得的, 所以, 若  $a_i$  是一个最小相位多项式, 则解不是发



散的。实际求解的过程中，无论  $A(Z)$  或  $Y(Z)$  的系数，一般都要对求和号上的无穷限作截尾。在所讨论过的  $B(Z) = 1/A(Z) = 1/(1 - Z/Z_0)$  例子中，和中只有一项。这种滤波器叫反馈滤波器，就窄带滤波来说，反馈滤波要比褶积滤波经济得多，因为  $A(Z)$  的系数比  $B(Z) = 1/A(Z)$  的系数少得多。最后，我们研究一下  $B(Z)$  的谱。因为

$$\begin{aligned} A(Z) &= 1 - Z/Z_0 \\ &= 1 - \frac{e^{i\omega}}{(1 + \varepsilon)e^{i\omega_0}} \\ &= 1 - \frac{e^{i(\omega - \omega_0)}}{(1 + \varepsilon)} \end{aligned}$$

而且

$$\bar{A}(1/Z) = 1 - \frac{e^{-i(\omega - \omega_0)}}{1 + \varepsilon}$$

所以

$$\begin{aligned} \bar{A}(1/Z) A(Z) &= \left(1 - \frac{e^{-i(\omega - \omega_0)}}{1 + \varepsilon}\right) \left(1 - \frac{e^{i(\omega - \omega_0)}}{1 + \varepsilon}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} - \frac{1}{1 + \varepsilon} \\ &\quad (e^{-i(\omega - \omega_0)} + e^{i(\omega - \omega_0)}) \\ &= 1 + \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} - \frac{2\cos(\omega - \omega_0)}{1 + \varepsilon} \\ &= 1 + \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} - \frac{2}{1 + \varepsilon} + \frac{2}{1 + \varepsilon} \end{aligned}$$

$$[1 - \cos(\omega - \omega_0)]$$

$$= \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon}\right)^2 + \frac{4}{1 + \varepsilon} \frac{\sin^2 \frac{\omega - \omega_0}{2}}{2}$$

$$\overline{B}(1/Z) B(Z) = \frac{(1 + \varepsilon)^2}{\varepsilon^2 + 4(1 + \varepsilon) \sin^2\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right)}$$

(2-5-9)

这个函数取为  $1/[\varepsilon^2 + (\omega - \omega_0)^2]$ ，就可达到较好的近似。图 2-15 就是 (2-5-9) 的图示。

至此，为什么叫窄带滤波就清楚了。它放大了一个很窄的范围里的频率，而把其它频率削弱了。这种滤波器的频率窗为  $\Delta\omega \approx 2\varepsilon$  宽。时窗是  $\Delta t = 1/\varepsilon$ ，这是阻尼正弦函数  $b_t$  的阻尼时间常数。

所讨论的滤波器有一个不足的方面。虽然它的输入可能是一个实时间序列，但它的输出却是一个复时间序列。在许多应用中，希望滤波器是实系数的。

一种改进办法是在滤波器  $[1, e^{i\omega_0}/(1 + \varepsilon)]$  之后，紧跟一个时间域的复共轭滤波器  $[1, e^{-i\omega_0}/(1 + \varepsilon)]$ ，这种组合的时间域算子是  $[1, (2\cos\omega_0)/(1 + \varepsilon), 1/(1 + \varepsilon)^2]$ ，它已是实的了〔注：频率域的复共轭是  $\overline{B}(1/Z)$ ，而在时间域复共轭是  $\overline{B}(Z) = \overline{b_0} + \overline{b_1}Z + \dots$ 〕此组合滤波器可用  $B(Z)\overline{B}(Z)$  表示，它的谱是  $[B(Z)\overline{B}(1/Z)][\overline{B}(Z)B(1/Z)]$ 。不难验证， $\overline{B}(Z)$  的谱与  $B(Z)$  的谱相似，只是峰尖不在  $\omega_0$  而在  $-\omega_0$ 。所以，组合滤波器的谱是图 2-15 的谱与将其沿频率轴反个向得到的谱之乘积。见图 2-16。

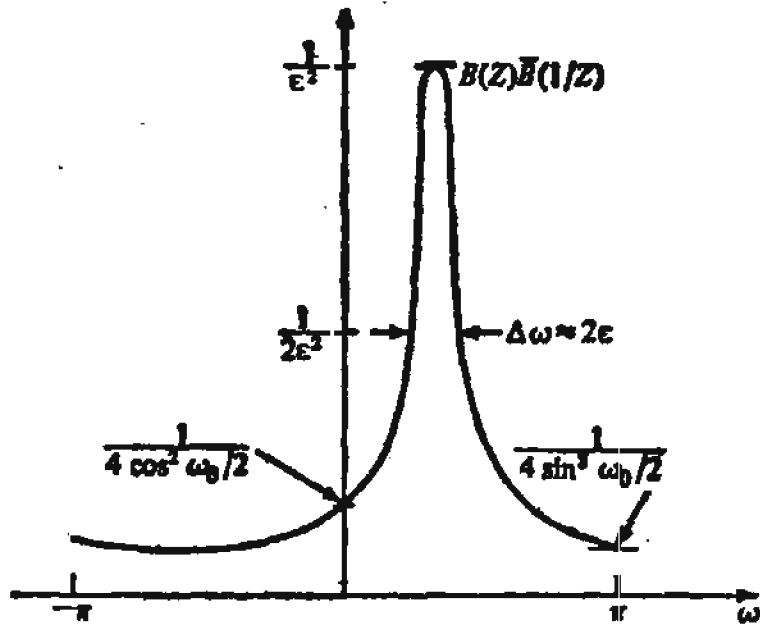


图 2-15  
单极点( $Z_0 = (1 + \epsilon) e^{j\omega_0}$ )滤波器的谱

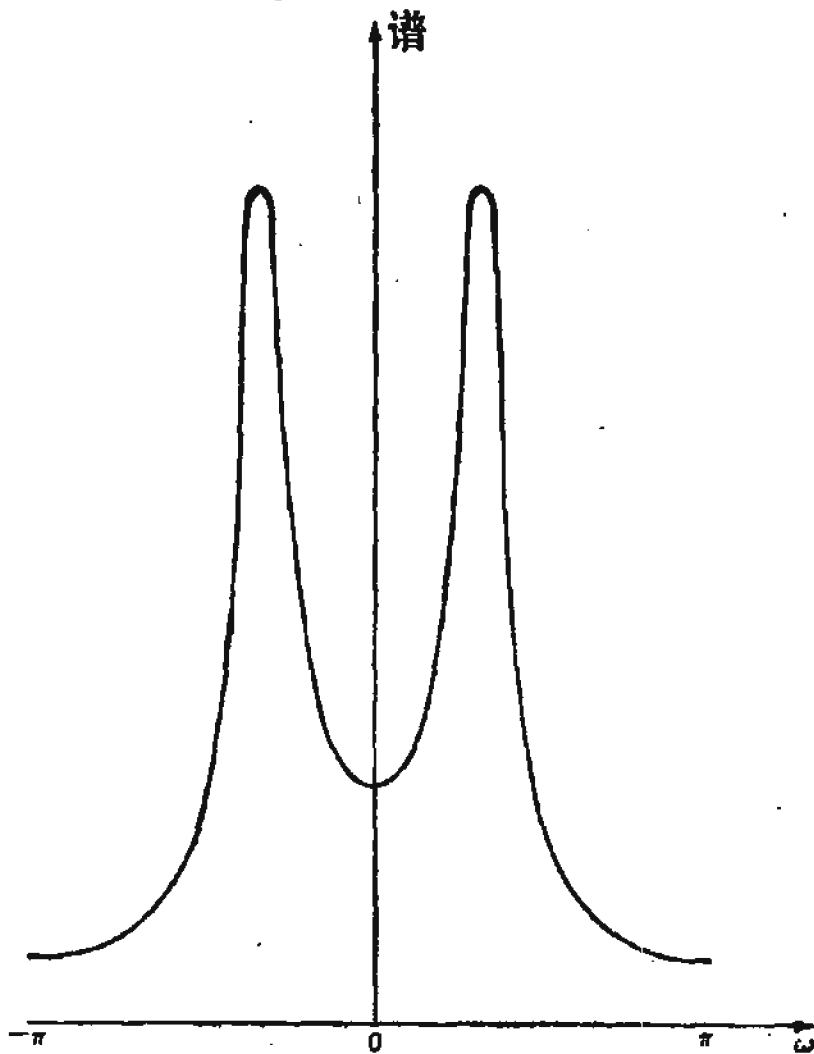


图 2-16  
双极点滤波器的谱，其中，一个极点如图2-15，另一个极点在共轭位置

## 练习

1. 简单的反馈算子是  $y_t = (1 - \epsilon)y_{t-1} + x_t$ 。这种反馈算子称为漏孔积分。若  $x_t$  是一个脉冲，请给出输出  $y_t$  的近似表达式。试问，得到的解的衰减时间  $\tau$  多大（取  $y_t$  下降到  $e^{-1}y_0$  的那个时刻）？对于小值  $\epsilon$ ，如  $\epsilon = 0.1$ 、 $0.001$  或  $0.0001$ ， $\tau$  值多大？

2. 问： $1/(1 - 0.1Z + 0.9Z^2)$  的极点，距单位圆多远？此滤波器衰减时间多大？它的谐振频率多大？

3. 试对500点/秒采样的数据，设计一个三项实反馈的、通过59~61赫芝的滤波器。其极点在哪里？此滤波器的衰减时间多大？

## 2-6 全通滤波器

这一节将讨论谱恒为1的滤波器，即

$$B(Z)\overline{B(1/Z)} = 1$$

也就是说，在频率域中， $B(Z)$  的形式是  $e^{i\phi(\omega)}$ ，其中  $\phi$  是实的，叫作相移。显然，对于所有实的  $\phi$ ， $\overline{B(1/Z)} = 1$ 。按任一给定的相移设计一个滤波器并不难，只要将  $e^{i\phi(\omega)}$  作逆付里叶变换回到时间域就行了。如果  $\phi(\omega)$  是任意的，得到的时间函数可能是双边的。由于我们的重点是讨论表因的物理过程，所以，要研究那一类函数  $\phi(\omega)$  可得到单边时间函数。最简单的办法是，从单极点、单零点的全通滤波器的简单情况着手。然后，通过这些简单的滤波器串联而得更为精巧的滤波器。考虑滤波器

$$P(Z) = \frac{Z - 1/\overline{Z_0}}{1 - Z/\overline{Z_0}} \quad (2-6-1)$$

注意，这是形为  $Z^N \overline{A(1/Z)}/A(Z)$  的函数的一种简化情况

[译注:  $N=1$ ,  $A(Z) = 1 - Z/Z_0$ ], 其中,  $A(Z)$  是一个  $N$  次 (或小于  $N$  次) 的多项式。现在来验证一下, 滤波器  $P_t$  的谱的确是一个与频率无关的常数, 它的谱是

$$\overline{P}(1/Z) P(Z) = \frac{1/Z - 1/Z_0}{1 - (1/Z)/\overline{Z_0}} \frac{Z - 1/\overline{Z_0}}{1 - Z/Z_0} \quad (2-6-2)$$

(2-6-2) 的右边第一个因式上下皆乘以  $Z$ , 就得

$$\overline{P}\left(\frac{1}{Z}\right) P(Z) = \frac{1 - Z/Z_0}{Z - 1/\overline{Z_0}} \frac{Z - 1/\overline{Z_0}}{1 - Z/Z_0} = 1 \quad (2-6-3)$$

对于一般形式的  $P(Z) = Z^N \overline{A}(1/Z)/A(Z)$ , 也容易证明  $\overline{P}(1/Z)P(Z) = 1$ 。

若  $Z_0$  选在单位圆外, 则 (2-6-1) 可以按  $Z$  的正幂展开, 并且, 展开式在单位圆上收敛, 这说明, 其表因性关系等效于  $Z_0$  在单位圆外。置  $P(Z)$  的分子为 0, 可知其零点  $Z = 1/\overline{Z_0}$  在单位圆内, 这种情况示于

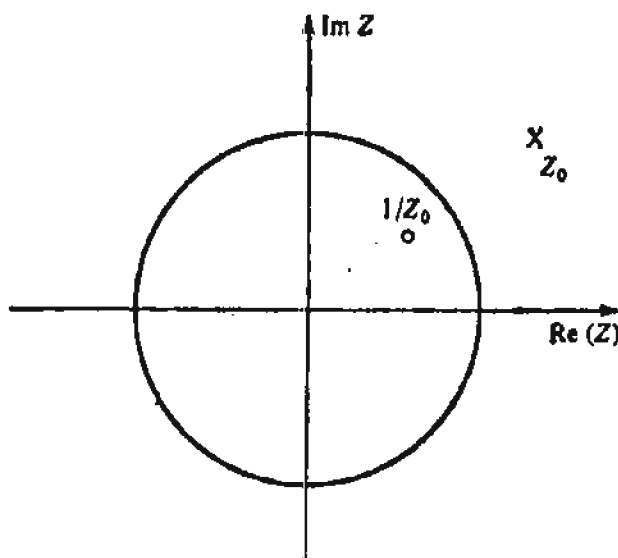


图 2-17

全通滤波器的极点在单位圆外, 零点在单位圆内, 它们在同一径线上。

图2-17。为了说明极点和零点在同一径线上, 可将  $Z_0$  写成极

- ① 原书误为:  $\frac{1/Z - 1/Z_0}{1 - 1(Z/\overline{Z_0})} \frac{Z - 1/\overline{Z_0}}{Z - 1/Z_0}$
- ② 原书误为:  $\frac{1 - Z/Z_0}{Z - 1/\overline{Z_0}} \frac{Z - 1/\overline{Z_0}}{1 - Z/Z_0}$

坐标形式  $r_0 e^{i\phi_0}$ ，容易看出， $1/\bar{Z}_0$  的幅角也是  $\phi_0$ 。

从2-2节（关于最小相位）可知， $P$  的分子不是最小相位，它的相位是随着  $\omega$  从 0 变为  $2\pi$  而增加  $2\pi$ ，因此，平均群延迟  $d\phi/d\omega$  是正的，不仅这是正的，事实上，每个频率的群延迟都是正的。为了了解这一点，首先提出

$$Z = e^{i\omega}$$

$$\frac{dZ}{d\omega} = ie^{i\omega} = iZ$$

$$\frac{d}{d\omega} = \frac{dZ}{d\omega} \cdot \frac{d}{dZ} = iZ \frac{d}{dZ} \quad (2-6-4)$$

全通滤波器的相位（或任何复数）可以写成

$$\phi = \text{Im} \ln P(Z) \quad (2-6-5)$$

由于  $|P| = 1$ ，所以，对数的实部是 0。对于全通滤波器（仅对全通滤波器），我们可以将 (2-6-5) 具体化为

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{i} \ln P(Z) = \frac{1}{i} \ln \frac{Z - 1/\bar{Z}_0}{1 - Z/Z_0} \\ &= \frac{1}{i} [\ln(Z - 1/\bar{Z}_0) - \ln(1 - Z/Z_0)] \end{aligned}$$

(2-6-6)

利用 (2-6-4)，可以求得群延迟是

$$\begin{aligned} \tau_g &= \frac{d\phi}{d\omega} = iZ \frac{d\phi}{dZ} = Z \left( \frac{1}{Z - 1/\bar{Z}_0} + \frac{1/Z_0}{Z - Z/Z_0} \right) \\ &= \frac{1}{1 - 1/\bar{Z}_0 Z} + \frac{Z/Z_0}{1 - Z/Z_0} \\ &= \frac{1 - Z/Z_0 + (1 - 1/\bar{Z}_0 Z)(Z/Z_0)}{(1 - 1/\bar{Z}_0 Z)(1 - Z/Z_0)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - 1/Z_0 \bar{Z}_0}{(1 - 1/\bar{Z}_0 Z)(1 - Z/Z_0)} \quad (2-6-7)$$

(2-6-7) 的分子是个正实数 (因为  $|Z_0| > 1$ )，其分母的形式是  $\bar{A}(1/Z)A(Z)$ ，它是一个谱，而且也是正的。这样，我们就证明了这种表因的全通滤波器的群延迟都是正的。

那么，如果在一个滤波器后面紧跟一全通滤波器，则其相位相加且组合滤波器的群延迟必然大于原来滤波器的群延迟。同理，最小相位滤波器的群延迟必定小于任何其它具有相同谱的滤波器的群延迟。

总之，单极点、单零点全通滤波器是以固定增益和相移而通过全部频率成分的，但相移可以通过极点移动而调节。若  $Z_0$  取在单位圆附近，则绝大多数相移集中在极点相应的频率附近，而极点离单位圆越远，则延迟涉及的频率越多。将几个单极点滤波器串联起来，可以作成复杂的相移或群延迟。

### 练习

1. 时间函数  $P_t = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, -\frac{3}{16}, \dots)$  是一个全通滤波器。试通过无穷级数求和，计算上述时间函数的自相关的若干个滞后值。

2. 画出全通滤波器  $(1 - \bar{Z}_0 Z)/(Z_0 - Z)$  的幅值(谱)、相位和群延迟，其中， $Z_0 = (1 + \varepsilon)e^{i\omega_0}$ ，而且  $\varepsilon$  是个小值。要在图中标出曲线上的重要参数。

3. 证明：由  $(1 - \bar{Z}_0 Z)/(Z_0 - Z)$  与  $(1 - Z_0 Z)/(\bar{Z}_0 - Z)$  串成的全通相移滤波器的系数都是实数。

4. 一个连续时间函数是一个连续时间、全通滤波器的脉冲响应。试分别在时间域和频率域描述此函数，在描述中将“时间”和“频率”这两个词互换。请列举一个这种函

数的物理例子。说“全通滤波器的群延迟是正的，”还对吗？

5. 等式 (2-6-7) 中群延迟  $\tau_g(\omega)$  的图，表明对所有  $\omega$ ， $\tau_g$  都是正的。当  $\omega$  在范围  $0 < \omega < 2\pi$  变化时，试求  $\tau_g$  的变化范围（提示：有一个巧法，请好好想一想）。

## 2-7 陷带滤波器和尖带滤波器

有些应用中，需要将非常窄的一段频带加以压制，而谱的其它部分保持不变。最普通的例子是消除电源线产生的60赫芝噪声。这种滤波器很容易由全通滤波器作少许变化而形成。在全通滤波器中，极点和零点距单位圆的相对距离是相等的。稍作一点改变，让零点更加接近于圆，实际上也可以将零点正好置于圆周上。这样，零点相应的频率便完全从输入数据的谱中去掉了。如果对于某个不需要的频率并不想完全压制掉，则可以让零点紧挨在单位圆的内外。零点离单位圆越远，陷带便陷得越浅，最后，当零点至圆的距离比极点至圆的距离更远时，陷带变成了一个尖带。这样得到的滤波器称为尖带滤波器，它的许多方面同前面讨论过的窄带滤波器相同。图2-18、19中，画出了这类简单的滤波器。尖带滤波器

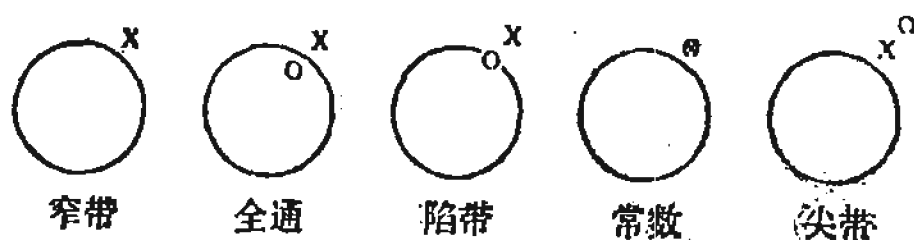


图 2-18

一些简单滤波器的极点和零点位置。圆圈表示  $Z$  平面上的单位圆，“X”表示极点，“O”表示零点。



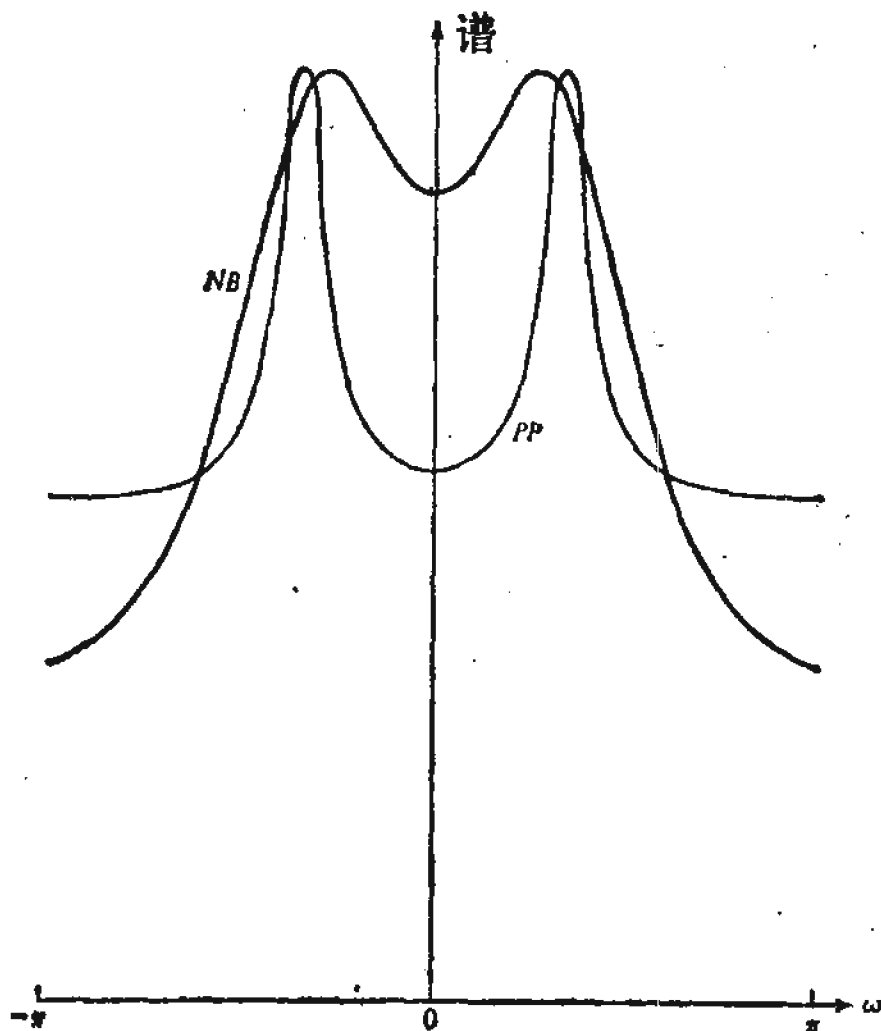


图 2-19

窄带滤波器和尖带滤波器 (PP) 的幅值 (谱) 与频率的关系。在  $Z_0 = 1.2e^{i\omega/l}$  处都有一个极点。若在  $Z_0 = 1.2e^{-i\omega/l}$  再有一个极点, 可使滤波器在时间域是实的。

与窄带滤波器之间的区别是远离  $\omega_0$  时的渐近特性, 前者是平的, 而后者随着  $|\omega - \omega_0|$  的增加而渐趋衰减。利用尖带滤波器与单极点滤波器串联来设计一些形状复杂的滤波器, 显得更加方便。

窄带滤波器和陡截止滤波器在使用中要小心, 这些滤波器的最致命弱点是, 它们随时间衰减得不快, 尽管在有些应用中不成问题, 但在其它一些应用中却有问题。显然, 若数据采集时间比窄带滤波器的脉冲响应更短, 或差不多, 则起

始过程的瞬时影响在时间上来不及衰减。同样，在压制60赫芝的滤波器中，陷带不能太窄。即使带通滤波器（用快速付里叶变换比用几个极点容易），在时间域中有一定的衰减率，但在有些滤波试验中，衰减还是太慢。在雷达和反射地震学中，信号的重要性并不完全看它的强度，晚到的反射可能非常弱，然而，其中却包含有先到的反射中所找不到的信息。若频率特性用得也太陡，则先到的强信号而引起的滤波器的共振，在晚来的弱反射到达时，还不可能有充分的衰减。

### 练习

1. 一个对称的物理不可实现的滤波器，对低于 $\omega_0$ 的所有频率，以单位增益准予通过，对高于 $\omega_0$ 的频率完全压制。试求这个滤波器振幅随时间的衰减率？

2. 从点震源来的波，其能量按球面面积衰减，而振幅按能量平方根形式衰减，这蕴含了一定的随时间的衰减率。当波由平面界面反射回来，时间衰减率仍然不变。问信号振幅衰减是时间 $t$ 的多少次幂？来自点反射体的向震源的反向散射波，能量随距离的衰减为负四次幂。问其随时间的衰减率多大？

3. 试把练习1的滤波器用到练习2的资料（波）上，并进行讨论。

4. 设计一个单极点、单零点陷带滤波器，对按500点/秒采样的数据，压制59~61赫芝的频率。

## 2-8 双线性变换

$Z$ 变换与付里叶变换的相互关系通过关系式 $Z = e^{i\omega}$ 和 $i\omega = \ln Z$ 表示。这种关系中存在一个问题， $Z$ 的两个多项式的比，并不变换成为 $\omega$ 的多项式比，反之也是这样。近似式

$$-i\hat{\omega} = 2 \frac{1-Z}{1+Z} \quad (2-8-1)$$

易解出  $Z$  为

$$Z = \frac{1+i\hat{\omega}/2}{1-i\hat{\omega}/2} \quad (2-8-2)$$

这些近似式常常是有用的，这就是幂级数展开式截尾的结果

$$-i\hat{\omega} = -\ln e^{i\omega} = -\ln Z =$$

$$= 2 \left[ \frac{1-Z}{1+Z} + \frac{1}{3} \frac{(1-Z)^3}{(1+Z)^3} + \frac{1}{5} \dots \right] \quad (2-8-3)$$

而

$$Z = e^{i\omega} = \frac{e^{i\omega/2}}{e^{-i\omega/2}} = \frac{1+i\omega/2 + (i\omega/2)^2/2! + \dots}{1-i\omega/2 + (i\omega/2)^2/2! + \dots} \quad (2-8-4)$$

若  $Z$  变换  $B(Z)$  是最小相位滤波器，则  $0 = B(Z_0)$  的任何根  $Z_0$  应在单位圆外。由于  $Z_0 = \exp \{i[\operatorname{Re}(\omega_0) + i\operatorname{Im}(\omega_0)]\}$ ， $|Z_0| = e^{-\operatorname{Im}(\omega_0)}$ ，这说明，对于最小相位滤波器， $\operatorname{Im}(\omega_0)$  应是负的（即  $\omega_0$  在下半平面）。因此，可以说， $Z = e^{i\omega}$  把单位圆外部映射到下半平面。从图 2-20 和 2-21，可以发现，双线性近似式 (2-8-1) 或 (2-8-2) 也把单位圆外部映射到下半平面。

	$Z$	$\omega = 2\pi n - i \ln Z$	$\hat{\omega} = 2i \frac{1-Z}{1+Z}$
A	1	$2\pi n + 0$	0
B	$i$	$2\pi n + \pi/2$	2
C	-1	$2\pi n + \pi$	$\pm \infty$
D	$-i$	$2\pi n - \pi/2$	-2
E	$\frac{1}{2}$	$2\pi n + .693i$	$i\frac{1}{3}$
F	2	$2\pi n - .693i$	$-i\frac{1}{3}$

图 2-20

$Z$  平面、 $\omega$  平面和  $\hat{\omega}$  平面上的有代表性的几个点。

虽然双线性近似式是一个近似式，但它却完全保持了最小相位特性。这

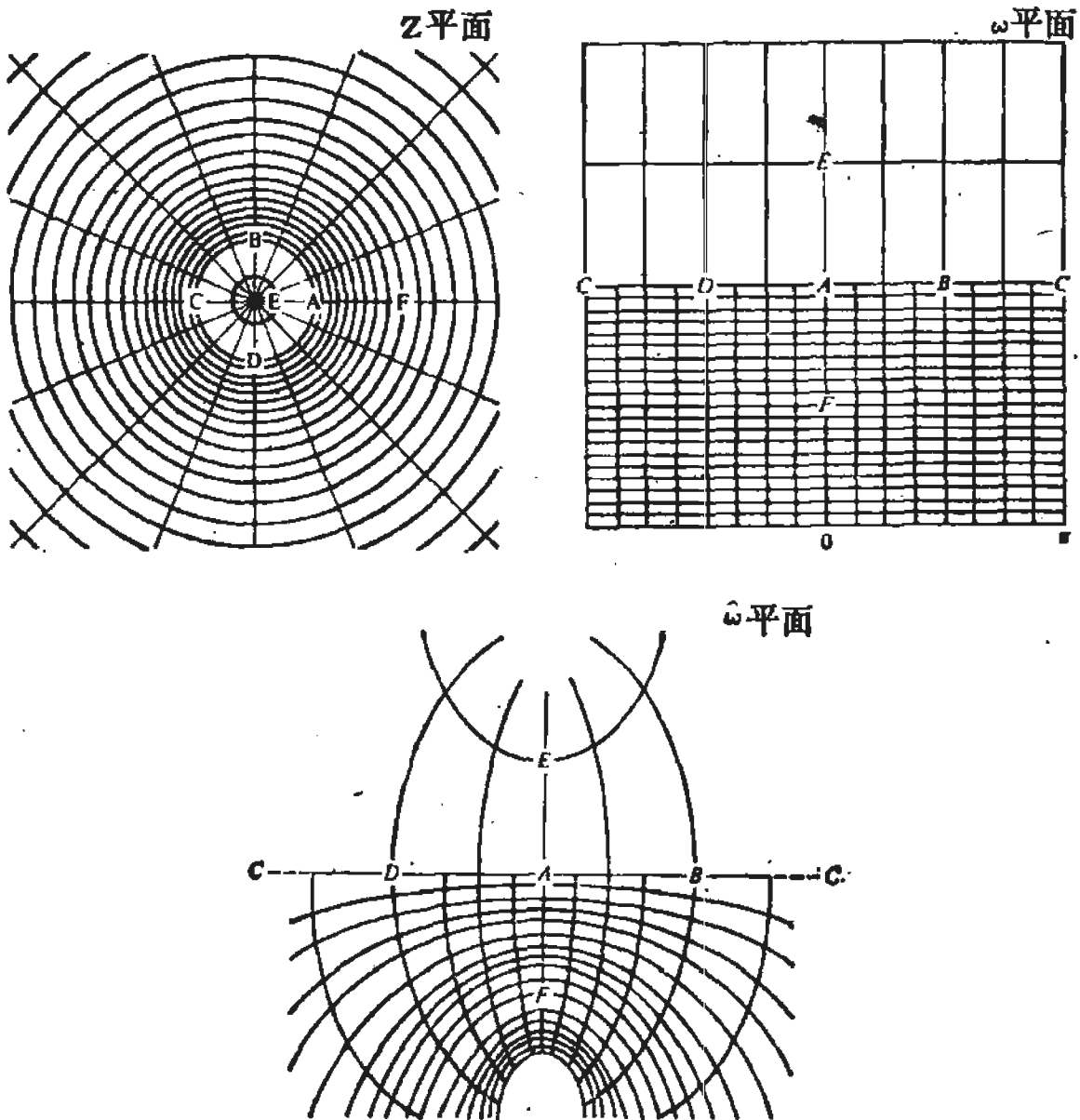


图 2-21

图2-20 中列出的点在  $Z$  平面、 $\omega$  平面和  $\hat{\omega}$  平面上的显示

是很有意义的，因为，若将一个稳定的微分方程通过(2-8-1)式转换为一个差分方程，则所得的差分方程也是稳定的（许多情况下，时间微商乘上 $(1-Z)$ 的近似，可把一个稳定的微分方程转换为一个有用的差分方程）。

记忆(2-8-1)式的简便方法是， $-i\omega$ 对应付里叶变换的时间微分法，而 $(1-Z)$ 是一阶差分算子，分母中的 $(1+Z)$ 表示“中心”在 $Z^{1/2}$ 。

为了说明双线性近似式是一个低频近似式，以  $Z^{-1/2}$  乘 (2-8-1) 式的分子和分母

$$\begin{aligned} -i\hat{\omega} &= 2 \frac{Z^{-1/2} - Z^{1/2}}{Z^{-1/2} + Z^{1/2}} \\ &= -2i \frac{\sin\omega/2}{\cos\omega/2} \\ \hat{\omega} &= 2\tan\omega/2 \end{aligned} \quad (2-8-5)$$

等式 (2-8-5) 表明采样率是每秒一个样点。若取任意采样率  $\Delta t$ ，则近似式 (2-8-5) 就成为

$$\omega\Delta t \approx 2\tan\omega\Delta t/2 \quad (2-8-6)$$

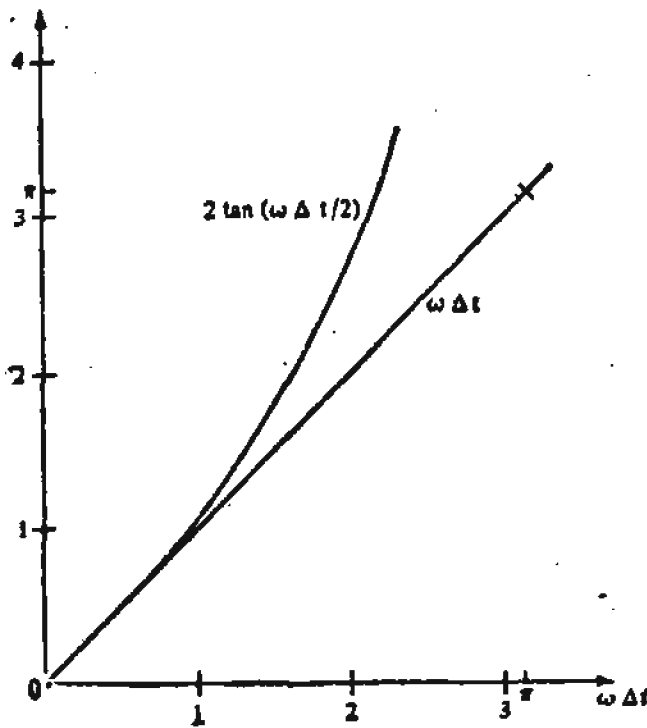


图 2-22

双线性变换近似的精度

图2-22中画出了这个近似关系。很清楚，采样足够密时（也就是说取  $\Delta t$  足够小时），就可以使误差达到任意小的程度。从图2-22可见，如果选  $\Delta t$  足够小，使  $\omega_{\max}\Delta t \leq 1$ ，则误差的比例是很小的。熟悉折叠（频率）定理的读者，可以想得起来，它给出的限制比较粗—— $\omega_{\max}\Delta t < \pi$ 。显然，

折叠定理提出的条件对于应用双线性变换来说实在是太宽了。

下面举一个在零频率处有一个极点的例子  $1/-i\omega$ 。这是一个积分（滤波器）。为了明显起见，我们讨论稍有点不同的极点

$$P = \frac{1}{-i\omega + \varepsilon} \quad (2-8-7)$$

其中， $\varepsilon$ 是个小值。应用双线性变换，即得

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2[(1-Z)/(1+Z)] + \varepsilon} \\ &= \frac{0.5(1+Z)}{1-Z + \varepsilon[(1+Z)/2]} \\ &= \frac{0.5(1+Z)}{(1 + \varepsilon/2) - Z(1 - \varepsilon/2)} \end{aligned} \quad (2-8-8)$$

从 (2-8-8) 可见，其时间域函数是实的，而且当  $\varepsilon$  趋于 0 时，它的形式为  $(0.5, 1, 1, 1, \dots)$  (取正的  $\varepsilon$ ，成为正向时间步进；若取负的  $\varepsilon$ ，便成为负的时间步进)。这种函数的性质在图 2-23 中作了总结。很凑巧，若时间域和频率域对调一下，便是

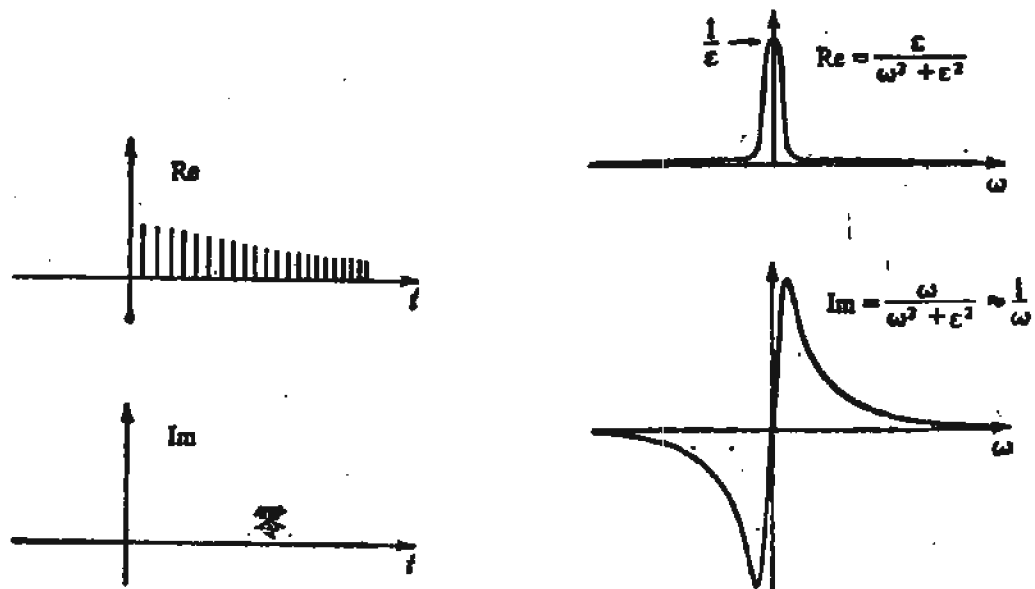


图 2-23

积分算子的性质

图1-17所示的 $90^\circ$ 相移滤波器。

### 练 习

在扩散问题的解中，常乘以因子  $F(\omega) = 1/(-i\omega)^{1/2}$ 。为了弄清其等效的褶积运算，要通过比较下式中  $Z$  的等幂项的系数，求出  $F(\omega)$  的表因的、采样时间的表示  $f_t$

$$(f_0 + f_1 Z + f_2 Z^2 + \dots)^2 = 1/(-i\omega) \simeq \frac{1}{2}(1+Z)/(1-Z)$$

试计算  $f_0$  至  $f_7$ 。

## 第3章 谱因式分解

我们将看到,任意给定一个谱,以它为自己的谱的时间函数,可以找到无穷多个。谱因式分解,是从谱所对应的这无穷多个时间函数中选找一个最小相位时间函数的一种方法。最小相位函数有多种用途。反馈滤波器必须用到它。在后面的章节中,讨论到波的传播问题时,常常出现最小相位函数。在对于给定谱的预测和调节理论中,也要用到最小相位函数。我们还将进一步看到,最小相位函数的能量,在越靠近 $t=0$ 处聚集得越多。这就决定了,在粘性波传播中弥散量最少。最小相位在二维位势理论中也有应用。在这种情况下,观测到的是矢量场幅值,而其分量是推算出来的。

本章的内容包括从已知谱求其最小相位子波的四种不同的计算方法。它们的不同处,在于对谱分解与最小相位的含义所持的观点有区别。

### 3-1 求根法

时间函数(2,1)与时间函数(1,2)具有相同的谱。它们的自相关都是(2,5,2)。从这里可以看出,具有相同自相关函数和谱的时间函数的多重性。由此得出,对任一函数,将它的时间顺序颠倒一下与原来的函数具有相同的自相关。由于有时要用到复时间序列,更精确一点说,任一(复)子波和它的时间反转后的复共轭波,具有相同的自相关和谱。先举一个仅含两个点的时间函数的例子来验证这一论断。 $(b_0, b_1)$ 的谱



是

$$\begin{aligned}\overline{B}\left(\frac{1}{Z}\right)B(Z) &= \left(\overline{b_0} + \frac{\overline{b_1}}{Z}\right)(b_0 + b_1 Z) \\ &= \frac{\overline{b_1}b_0}{Z} + (\overline{b_0}b_0 + \overline{b_1}b_1) + \overline{b_0}b_1 Z\end{aligned}\tag{3-1-1}$$

共轭的时间反转函数  $(\overline{b_1}, \overline{b_0})$  的  $Z$  变换  $B_r(Z) = \overline{b_1} + \overline{b_0}Z$ , 谱为

$$\begin{aligned}\overline{B}_r\left(\frac{1}{Z}\right)B_r(Z) &= \left(b_1 + \frac{b_0}{Z}\right)(\overline{b_1} + \overline{b_0}Z) \\ &= \frac{b_0\overline{b_1}}{Z} + (b_0\overline{b_0} + b_1\overline{b_1}) + b_1\overline{b_0}Z\end{aligned}\tag{3-1-2}$$

可见谱(3-1-1)确实和谱(3-1-2)相同。现在我们对三点或更多点的时间函数进行验证。对三点时间函数验证了, 对一般情况应怎么做也就完全清楚了。设  $B(Z) = b_0 + b_1Z + b_2Z^2$ 。首先根据代数基本定理(即:  $n$  阶多项式有  $n$  个根),  $B(Z)$  可写成因式分解的形式

$$B(Z) = b_2(Z_1 - Z)(Z_2 - Z)\tag{3-1-3}$$

它的谱是

$$\begin{aligned}R(Z) &= \overline{B}\left(\frac{1}{Z}\right)B(Z) + \overline{b_2}b_2\left(\overline{Z_1} - \frac{1}{Z}\right)(Z_1 - Z)\left(\overline{Z_2} - \frac{1}{Z}\right) \\ &\quad (Z_2 - Z)\end{aligned}\tag{3-1-4}$$

子波(3-1-3)作怎样的改变才能使它的谱(3-1-4)保持不变呢?显然, 用幅值为1的任何复数去乘  $b_2$  都是可以的。(3-1-4)

的左边能分解成形如 $(\bar{Z}_i - \frac{1}{Z})(Z_i - Z)$ 因子的乘积。而这样的因子恰恰同(3-1-1)相象。 $(Z_i - Z)$ 的时间函数是 $(Z_i, -1)$ ，并且它的复共轭时间反转为 $(-1, \bar{Z}_i)$ 。这样，(3-1-3)中任何因子 $(Z_i - Z)$ 可以用 $(-1 + \bar{Z}_i \cdot Z)$ 来替代。(3-1-3)推广到一般情形，可有 $N$ 个因子 $[(Z_i - Z), i = 1, 2, \dots, N]$ 。通过颠倒因子的次序可组成 $Z^N$ 个不同的子波，而这些子波具有的谱相同。再联系到复平面上的单位圆来考虑。因子 $(Z_i - Z)$ 表示 $Z_i$ 是 $B(Z)$ 和 $R(Z)$ 的根。如果我们在 $B(Z)$ 中，用 $(-1 + \bar{Z}_i Z)$ 替代 $(Z_i - Z)$ ，相当于从 $B(Z)$ 中去掉了 $Z_i$ 这个根，而用另一个根 $Z = 1/\bar{Z}_i$ 替代了。 $R(Z)$ 的根却一点也没有改变，原因是 $Z_i$ 和 $1/\bar{Z}_i$ 本来都是 $R(Z)$ 的根，且它们互为共轭倒数。总之，在复平面上，若 $B(Z)$ 有根 $Z_i$ ，则 $Z_i$ 也必定是 $R(Z)$ 的根。此外， $R(Z)$ 还有根 $1/\bar{Z}_i$ 。用 $1/\bar{Z}_i$ 替代某个根 $Z_i$ 只改变 $B(Z)$ ，而不改变 $R(Z)$ 。用根 $1/\bar{Z}_i$ 替代根 $Z_i$ 的运算可以记为

$$B'(Z) = \frac{Z - 1/\bar{Z}_i}{1 - Z/\bar{Z}_i} B(Z) \quad (3-1-5)$$

$B(Z)$ 乘的因式正好就是前一章中曾讨论过的全通滤波器。由此，可知 $B'(Z)$ 和 $B(Z)$ 具有相同的谱。事实上，说 $B'(Z)$ 和 $B(Z)$ 具有相同的谱，与 $Z_i$ 是不是 $B(Z)$ 的根并没有什么关系。若 $Z_i$ 是 $B(Z)$ 的根，那么 $B'(Z)$ 将是一个多项式；否则它就是一个无穷级数。

现在讨论从已知 $R(Z)$ 中计算 $B(Z)$ 的问题。首先按定义， $R(Z)$ 的根是方程 $R(Z) = 0$ 的解。如果 $R(Z)$ 乘以 $Z^N$ 〔设 $R(Z)$ 的最高次幂为 $N$ 〕，那么 $Z^N R(Z)$ 是一个多项式，而方程 $R(Z) = 0$ 的解 $Z_i$ 必是 $Z^N R(Z) = 0$ 的解。求多项式的根虽

然比较麻烦,但有标准的求法。假定根已全部求出来了,那么首先要检查一下这些根是否  $Z_i$  和  $1/\bar{Z}_i$  成对出现。如果不成对,则说明  $R(Z)$  并不真是一个谱。如果根都成对了,则对应于单位圆内的每一零点,在单位圆外就必然有一个零点。参看图3-1。于是,若要求以  $R(Z)$  为其谱的最小相位子波,只须把单位圆外的全部根收集起来,构造一个  $B(Z)$  就成了。

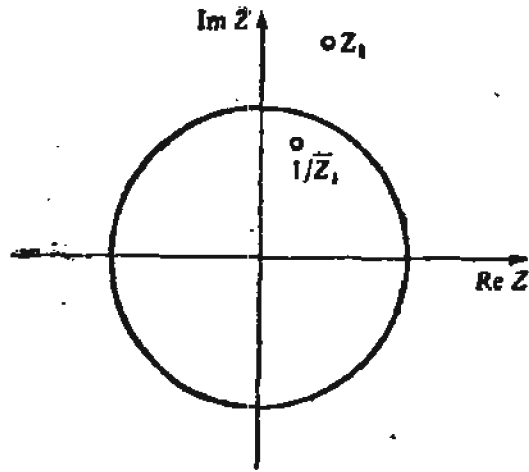


图 3-1  
 $\bar{B}(1/Z)B(Z)$  的根

$$B(Z) = b_N (Z - Z_1) (Z - Z_2) \cdots (Z - Z_N) \quad (3-1-6)$$

这就总括了由已知谱求其一个最小相位子波的计算过程。 $N$  比较大时,计算上比下面将要讨论的另一些方法显得麻烦一些。

求根法的价值在于,它体现了提取最小相位子波的一些基本原则:

1. 每一个谱具有一个最小相位子波,且除开一个幅值为 1 的复标量因子的区别之外,是唯一的。
2. 对任意一个谱,相应有无穷多个时间函数。
3. 并非所有函数都是某一函数的自相关函数。

谱因式分解求根法早在二十年代和三十年代就已由一些经济学家研究过。早期的参考文献可在渥尔德(Wold)的著作《平稳时间序列》中找到<sup>[10]</sup>。

### 练习

1. 怎样确定(3-1-6)中的标量因子  $b_N$ ?

2. 计算四个子波  $(4, 0, -1)$ ,  $(2, 3, -2)$ ,  $(-2, 3, 2)$ ,  $(1, 0, -4)$  各自的自相关。

3. 已知功率谱为  $P(\omega) = 38 + 10\cos\omega - 12\cos 2\omega$ 。它的子波是怎样的？哪一个是最小相位？（提示： $\cos 2\omega = 2\cos^2\omega - 1$ ;  $2\cos\omega = Z + 1/Z$ ；利用平方律公式）

4. 证明：如果子波  $b_t = (b_0, b_1, \dots, b_n)$  是实的，则它的谱  $R$  的根四个成组地出现  $Z_0, 1/Z_0, \bar{Z}_0$  和  $1/\bar{Z}_0$ 。试研究根正好在单位圆上和在实轴上的情况。问这样的根至少相重多少次？

### 3-2 鲁宾逊能量延迟定理

现在来证明，最小相位子波比任何与其同谱的其它单边子波具有较少的能量延迟。更确切地说，我们将证明，对于最小相位子波，从 0 到任何时刻  $t$  的能量和，大于或等于同谱的任何其它子波在相同时间间隔内的能量和。参看图 3-2。此即鲁宾逊 (ROBINSON) 能量延迟定理<sup>[11]</sup>。

比较两个子波  $P_{内}$  和  $P_{外}$ ，它们的区别仅在于一个零点的不同，这个零点对  $P_{内}$  在单位圆内，对  $P_{外}$  为单位圆外。这样的两个子波可记为

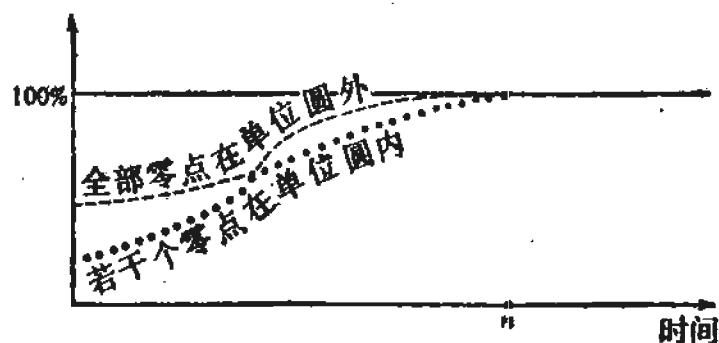


图 3-2

滤波器自时刻 0 至时刻  $t$  总能量的百分比

$$P_{\text{外}}(Z) = (b + sZ)P(Z)$$

$$P_{\text{内}}(Z) = (s + bZ)P(Z)$$

其中  $b$  比  $s$  大, 而  $P$  是一个  $n$  阶的多项式。下面把所讨论的各项列入一个表格。

$i$	$P$ 输出	$P$ 输入	$P^2$ 输出 - $P^2$ 输入	$\sum_{k=0}^i (P^2_{\text{输出}} - P^2_{\text{输入}})$
0	$bp_0$	$sp_0$	$(b^2 - s^2)p_0^2$	$(b^2 - s^2)p_0^2$
1	$bp_1 + sp_0$	$sp_1 + bp_0$	$(b^2 - s^2)(p_1^2 - p_0^2)$	$(b^2 - s^2)p_1^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$k$	$bp_k + sp_{k-1}$	$sp_k + bp_{k-1}$	$(b^2 - s^2)(p_k^2 - p_{k-1}^2)$	$(b^2 - s^2)p_k^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n+1$	$sp_n$	$bp_n$	$(b^2 - s^2)(-p_n^2)$	0

表中右列给出的差显然总是正的。

为要证明最小相位子波能量延迟最小, 可以仿前把它的根逐个提到前头进行讨论。

### 练习

1. 对复值  $b, s$  和  $P$ , 完成前述的最小能量延迟的证明。

[注意: 取  $P_{\text{内}} = (s + bZ)P$  或  $P_{\text{内}} = (\bar{s} + \bar{b}Z)P$ ]

## 3-3 陶布里兹方法

谱因式分解的陶布里兹(TOEPLITZ)方法, 是建立在陶布里兹矩阵的一些特殊性质上的<sup>[12]</sup>。本章中, 我们引入陶布里兹矩阵来实现谱因式分解。以后几章中, 我们将多次用到本章所述的代数方法。对时间序列进行预测时, 要用到所谓的“预测滤波器”。这种滤波器可以通过解陶布里兹联立方程组得到。

地震学中, 感兴趣的并不是预测本身, 而是预测中的误差。在石油勘探中使用反射地震法。理想情况下, 同雷达类

似，时间延迟与实际距离成正比。这就是所谓的“一次”反射。在浅海中，情况要复杂一些，大量声波在海水表面与海底之间来回振荡，称为多次反射。从多次反射中分离出一次反射，是通过预测法实现的。多次反射能从早到的反射波预测到，但是一次波则不能。于是有用的信息留在地震记录中不能预测的部分里。一台作地震数据处理的计算机，一天内约能解十万次陶布里兹联立方程组。

陶布里兹矩阵代数的另一个重要应用是高分辨谱分析。即要从短的（在时间上或空间上）数据采样中估计一个功率谱。在这方面，统计学和工程技术应用中通常所依据的一些假定，往往在地球物理上不适用。伯格（Burg）注意到了这种情况，他把陶布里兹矩阵的某些特殊性质用来研究极大熵谱估计理论。这将在下一章讨论。

再有，陶布里兹矩阵在描述成层物质的数学物理方法中，也起着关键作用。地球物理工作者通常都用叠合的水平地层或用同心球壳（每个球壳或地层都是均匀的）来模拟地壳。很奇怪，许多数学物理书都不讲陶布里兹矩阵。原因是这些书都偏重于正演问题，即在已知物质结构条件下，计算所观测到的波（或位势）。而在地球物理中，我们对正演问题和反演问题两者都感兴趣。所谓反演问题，即从地面观测到的波去推断地壳的物质结构。下一章中将看到，陶布里兹矩阵在反演问题中起着主导作用。

从时间函数  $x_t$  着手研究。这个时间函数可以是最小相位，也可以不是，它的谱是  $R(Z) = \overline{X}(1/Z)X(Z)$ 。在前几节中我们看到，仅给出  $R(Z)$  还无法肯定  $x_t$  是不是最小相位函数。我们可以假定谱  $R(Z)$  存在一个最小相位  $B(Z)$ 。即  $R(Z) = \overline{B}(1/Z)B(Z)$ 。因为  $B(Z)$  根据假定是最小相位，所

以它有倒数  $A(Z) = 1/B(Z)$ 。我们可按下列方法求其倒数  $A(Z)$ 。

$$R(Z) = \overline{B}\left(\frac{1}{Z}\right)B(Z) = \frac{\overline{B}(1/Z)}{A(Z)} \quad (3-3-1)$$

$$R(Z)A(Z) = \overline{B}\left(\frac{1}{Z}\right) = \overline{b_0} + \frac{\overline{b_1}}{Z} + \dots \quad (3-3-2)$$

为了求  $A(Z)$ ，可利用等式两端同幂项系数相等的关系。例如，令  $A(Z)$  是三项多项式  $a_0 + a_1Z + a_2Z^2$ ，在 (3-3-2) 中  $Z^0$  的系数为

$$r_0a_0 + r_{-1}a_1 + r_{-2}a_2 = \overline{b_0} \quad (3-3-3a)$$

$Z^1$  的系数是

$$r_1a_0 + r_0a_1 + r_{-1}a_2 = 0 \quad (3-3-3b)$$

$Z^2$  的系数是

$$r_2a_0 + r_1a_1 + r_0a_2 = 0 \quad (3-3-3c)$$

以上三式联立，得一方程组

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_{-1} & r_{-2} \\ r_1 & r_0 & r_{-1} \\ r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b_0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-3-4)$$

将它推广到一般情况也不难。矩阵主对角线上每个元素皆为  $r_0$ ，主对角线下一对角线的元素为  $r_1$ ，如此等等。这样的矩阵称为陶布里兹矩阵。现记  $a_k' = a_k/a_0$ 。由  $\overline{A}(Z)\overline{B}(Z) = 1$  知  $\overline{b_0} = 1/\overline{a_0}$ 。记正数  $v = 1/a_0\overline{a_0}$ 。(3-3-4) 的等号两边遍除以  $a_0$ ，得到最一般的形式

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_{-1} & r_{-2} \\ r_1 & r_0 & r_{-1} \\ r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-3-5)$$

这三个方程中含有三个未知数  $a'_1$ ， $a'_2$  和  $v$ 。为了使 (3-3-

5) 便于应用解标准联立方程组的程序求解, 应对等式两边的列向量除以  $v$ 。解此方程得到的  $a_0$ , 幅值为  $1/\sqrt{v}$ , 但相位是任意的, 这与用求根法作谱因式分解相同。

至此, 有人或许会耽心, 象这样通过解联立方程所确定的  $A(Z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2$ , 并不一定是最小相位。因而认为不必通过  $B(Z) = 1/A(Z)$  计算  $B(Z)$ 。也许还有人说, 如果方程的个数太多, 计算上可能也有困难, 实际上有经验的人早已知道, 这些想法都错了。要证明这一点很容易, 我们在说明解 (3-3-3) 的算法的过程中将给出证明。

解联立方程组的标准算法要求计算时间与  $n^3$  成比例, 计算存储量与  $n^2$  成比例。来文森 (Levinson) 的陶布里兹矩阵算法只要求时间与  $n^2$  成比例, 而存储量与  $n$  成比例。首先应该注意的是, 陶布里兹矩阵含有许多相同的元素。来文森利用这一特殊的陶布里兹对称性建立了他的快速算法。

这种方法是通过递推达到最后结果, 即, 从给出的  $k \times k$  阶方程组的解, 推算  $(k+1) \times (k+1)$  阶方程组的解。首先, 必须得到  $k=1$  的解, 然后让  $k$  每次递增 1, 重复应用一组公式。这里将只说明对于实时间函数 ( $r_k = r_{-k}$ ), 从  $3 \times 3$  方程组递推到  $4 \times 4$  方程组的情形。一般情形, 留给读者自己练习。

给定一个  $3 \times 3$  联立方程组, 已知它的解为  $a_1$

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ r_1 & r_0 & r_1 \\ r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-3-6)$$

那么下列方程中, 已知  $r_3$  可求  $e$  (或已知  $e$  可算  $r_3$ )



$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_1 \\ r_3 & r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ e \end{bmatrix} \quad (3-3-7)$$

(3-3-7) 中前三行与 (3-3-6) 相同, 最后一行是新定义的  $e$ 。来文森递推表明可推算出下面  $4 \times 4$  阶联立方程组的解  $a'$ 。

〔这个  $4 \times 4$  阶联立方程组形式同 (3-3-6) 一样, 但高一阶〕

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_1 \\ r_3 & r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-3-8)$$

主要的技巧是从 (3-3-7), 可写出一个“颠倒”方程组〔如果感到用矩阵不大顺手, 可将 (3-3-7) 的方程写出来, 然后颠倒一下未知元素的次序, 再颠倒方程的次序〕。

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_1 \\ r_3 & r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a_3 \\ a_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (3-3-9)$$

来文森递推的做法是从 (3-3-7) 中减去 (3-3-9)〔先在 (3-3-9) 两边乘以一个待定参数  $c_3$ 〕, 适当确定  $c_3$  以便得到 (3-3-8), 即

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_1 \\ r_3 & r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} - c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ e \end{bmatrix} - c_3 \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} \right\} \quad (3-3-10)$$

为了使 (3-3-10) 右边与 (3-3-8) 右边相一致, 必须使最下面一行为零, 所以必须选择  $c_3 = e/v$ , 这意味着  $v' = v - c_3 e = v - e^2/v = v[1 - (e/v)^2]$ 。这样 ( $4 \times 4$ ) 方程组的解可

通过下列步骤从  $3 \times 3$  方程组的解推导出来。即

$$e \leftarrow \sum_{i=0}^2 a_i r_{3-i} \quad (3-3-11)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{e}{v} \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-3-12)$$

$$v' \leftarrow v[1 - (e/v)^2] \quad (3-3-13)$$

刚才说明了如何从  $3 \times 3$  的陶布里兹方程的解推算  $4 \times 4$  陶布里兹方程的解。来文森递推算法就是这样从  $1 \times 1$  开始一步一步递推直到  $n \times n$ 。

现在再从计算步骤中验证一下这样得到的  $A(Z)$  确实是最小相位。首先注意到， $v = 1/\bar{a}_0 a_0$  和  $v' = 1/\bar{a}_0' a_0'$  总是正的。于是，从 (3-3-13) 可知  $-1 < e/v < +1$  (以后将看到  $c = e/v$  绝对值不超过 1。这一事实反映了波的反射系数不超过 1)。再有，(3-3-12) 可写成多项式形式

$$A'(Z) = A(Z) - (e/v) Z^3 A(1/Z) \quad (3-3-14)$$

我们知道， $Z^3$  在单位圆上幅值为 1。同样 (对实时间序列)， $A(Z)$  的谱等于  $A(1/Z)$  的谱。于是，根据最小相位子波加点渣滓并不改变它的最小相位特征的定理，如果  $A(Z)$  是最小相位，那么  $A'(Z)$  也是最小相位。总之，下面三种说法是等价的。

1.  $R(Z)$  可以  $\bar{X}\left(\frac{1}{Z}\right)X(Z)$  形式表示
2.  $|c_k| < 1$
3.  $A(Z)$  是最小相位

```

COMPLEX R,A,C,E,BOT,CONJG
C(1)=-1.; R(1)=1.; A(1)=1.; V(1)=1.
200 DO 220 J=2,N
    A(J)=0.
    E=0.
    DO 210 I=2,J.
210 E=E+R(I)*A(J-I+1)
    C(J)=E/V(J-1)
    V(J)=V(J-1)-E*CONJG(C(J))
    JH=(J+1)/2
    DO 220 I=1,JH
    BOT=A(J-I+1)-C(J)*CONJG(A(I))
    A(I)=A(I)-C(J)*CONJG(A(J-I+1))
220 A(J-I+1)=BOT

```

图 3-3

来文森递推计算程序。假定输入  $r_k$  已除以  $r_0$  作了规格化。复数运算法供选用。

上述三条中如果有一条不成立，则三条都不成立。图 3-3 中印出了从  $r_k$  计算  $a_k$  和  $c_k$  的程序。第 8 章中论及波在地层中的传播时，给出的程序是从  $a_k$  或  $c_k$  计算

### 练习

1. 设 (3-3-8) 式的  $4 \times 4$  陶布里兹矩阵中最上面一行为

$$\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)。试求  $a_k$ 。$$

2. 如果时间函数是复数，如何改变使用来文森的递推算法？特别在 (3-3-11)，(3-3-12) 和 (3-3-13) 式中，哪些地方出现复共轭？

3. 设  $A_m(Z)$  是一个多项式；它的系数是  $m \times m$  阶陶布里兹方程组的解。试证明：

$$v_n \delta_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(Z) A_m(Z) Z^{-n} d\omega \quad n \leq m$$

这表明多项式  $A_m(Z)$  与多项式  $Z^n$  配以一个正的权函数  $R$  在单位圆上是正交的。利用这一结论，试说明  $A_m$  与  $A_n$  正交，即

$$v_n \delta_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(Z) A_m(Z) \bar{A}_n\left(\frac{1}{Z}\right) d\omega$$

(提示: 先考虑  $n \leq m$ , 然后考虑全部  $n$ )

陶布里兹矩阵, 在数学文献中论及单位圆上正交多项式的问题时也要遇到, 作者特推荐阿提姆逊 (Atkinson) 的著作<sup>[14]</sup>。

### 3-4 怀特耳指数—对数法

用怀特耳 (WHITTLE) 方法作谱因式分解, 只需把一个幂级数代入另一个幂级数中。因此, 这种方法与求根法一样, 学习和掌握都比较容易, 但计算不方便<sup>[15]</sup>。

给定某一自相关函数  $r_t$

$$R(Z) = \dots + r_{-1}Z^{-1} + r_0 + r_1Z + r_2Z^2 + \dots$$

若在单位圆上  $|R| > 2$ , 则除以一个比例因子。把这个幂级数代入由对数展开的幂级数中, 得

$$U(Z) = \ln R(Z)$$

$$= (R-1) - \frac{(R-1)^2}{2} + \frac{(R-1)^3}{3} - \dots$$

$$0 < R \leq 2$$

$$= \dots + u_{-1}Z^{-1} + u_0 + u_1Z + u_2Z^2 + \dots$$

这样做起来很费力, 但用计算机还是可以完成的。

现在, 舍去  $U(Z)$  中的负次幂, 剩余部分记为  $U^+$ , 即

$$U^+(Z) = \frac{u_0}{2} + u_1Z + u_2Z^2 + \dots$$

把它代入由指数展开的幂级数里

$$B(Z) = e^{U^+(Z)} = 1 + U^+ + \frac{(U^+)^2}{2!} + \frac{(U^+)^3}{3!} + \dots$$

所要求的最小相位子波便是  $B(Z)$ ；它的谱正好是  $R(Z)$ 。为了弄清楚确实是这样，请看下列恒等式（式中  $\exp(x)$  即  $e^x$ ）

$$\begin{aligned} R(Z) &= e^{\ln R(Z)} \\ &= \exp\left(\frac{u_0}{2} + \sum_{-\infty}^{-1} u_k Z^k + \frac{u_0}{2} + \sum_{+1}^{\infty} u_k Z^k\right) \\ &= \exp\left(\frac{u_0}{2} + \sum_{-\infty}^{-1} u_k Z^k\right) \exp\left(\frac{u_0}{2} + \sum_{+1}^{\infty} u_k Z^k\right) \\ &= \exp\left[\bar{U}^+\left(-\frac{1}{Z}\right)\right] \exp[U^+(Z)] \\ &= \bar{B}\left(-\frac{1}{Z}\right) B(Z) \end{aligned}$$

这就把  $R(Z)$  因式分解成所要求的共轭对了。最后，证明  $B(Z) = e^{U^+(Z)}$  确实是最小相位。关于  $U^+(Z)$ ，我们所要知道的有两点，其一， $U^+(Z)$  有限；其二，它不包括  $Z^{-1}$  的幂。有两种证明方法（证明  $B(Z)$  是最小相位）。

一种证明方法是指明  $U(Z)$  的虚部在单位圆上，是  $B(Z)$  的相位角。要证明  $B(Z)$  是最小相位，只须说明  $B(Z)$  不因  $Z$  环绕单位圆转上若干圈（ $2\pi$  的若干倍）而随之增大。对最小相位来说，其相位必须以  $2\pi$  为周期。显然，相位  $u_1 \sin \omega + u_2 \sin 2\omega + \dots$  定满足这个条件。第二种证明方法更抽象一点。在此证明中，我们要指出，在某一点  $Z_0$  要使

$B(Z_0) = e^{U^+(Z_0)}$  为零的唯一情况是  $U^+(Z_0)$  等于  $-\infty$ ；换句话说，即  $U^+$  在  $Z_0$  不收敛。但这在单位圆内不可能发生。因为我们知道  $U(Z)$  的对数级数在单位圆上绝对收敛；这就意味着， $U^+(Z)$  在单位圆内收敛（有限）。由于  $B(Z)$  在单位圆内不可能有零点，所以它定是最小相位。

### 练习

1. 如果  $R$  在单位圆上  $|R| > 2$ ，怎样求得  $B(Z)$ ？
2. 假定  $U^+(Z) = aZ$ ，对  $a = -1, 0, 1, 100$  和  $i$ ，画出与  $B(Z)$  相应的时间函数。并画出它们的谱。试指出，哪一个象高斯函数。
3. 地震记录可以作“谱平衡”，其方法是对每一地震记录的付里叶变换用它的幅值去除一下和用其平均幅值去乘一下。这相当用一个对称滤波器作了褶积。试问：用因果滤波器如何做“谱平衡”呢？
4. 试考虑  $\ln B(Z) = U(Z)$  关于  $Z$  的微商的系数，找出从  $b_k$  求  $u_k$  及从  $u_k$  求  $b_k$  的递推公式。

## 3-5 柯尔莫廓洛夫方法

给定多项式  $X(Z)$ ，当取其系数  $(x_0, x_1, x_2, \dots)$  进行计算时，也就说是“在时间域上进行研究”。当在单位圆的若干个点<sub>上</sub>计算多项式  $X(Z)$  的值时，比方说是  $X(e^{i\omega_0})$ ， $X(e^{i\omega_1})$ ， $\dots$   $X(e^{i\omega_n})$ ，则这些值称为多项式  $X(Z)$  的频率域表示。我们已经知道，快速付里叶变换对于从时间域变换到频率域和从频率域变换到时间域是一个很有效的工具。这就引起了对在频率域中进行怀特<sub>尔</sub>因式分解法的重视。实际上，我们还可从另一个观点进一步理解谱因式分解，采用柯尔莫廓洛夫 (KOLMOGOROFF) 方法<sup>[16]</sup>。

从时间函数或  $Z$  变换  $X(Z) = x_0 + x_1Z + \dots$  出发, 令  $X_k$  表示该时间函数的变换, 即: 在单位圆上取几个点 ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) 计算出来的  $X(Z)$  的值。考虑下列恒等关系

$$R_k = \overline{X_k} X_k \\ = e^{\ln(R_k)} = e^{U_k}$$

在其指数部分加、减一待定函数  $\Phi_k$ , 上式为

$$R_k = \exp\left[-\frac{1}{2}(U_k - i\Phi_k)\right] \exp\left[\frac{1}{2}(U_k + i\Phi_k)\right] \\ = \overline{B_k} B_k$$

现在关键的一个问题是怎样选定  $\Phi_k$  才能保证  $B_k$  为最小相位, 即  $B(Z)$  变换为单边时间函数? 在怀特方法中, 我们注意到  $U^+(Z)$  最突出的性质是有限, 且在  $t=0$  之前时间函数  $u_t$  为零。因此, 希望我们所挑选的  $\Phi_k$  能使  $U_k + i\Phi_k$  变

换到时间域, 其时间函数  $u_t^+$  对于负时间为零。这可以按图 3-4 所述的步骤达到。

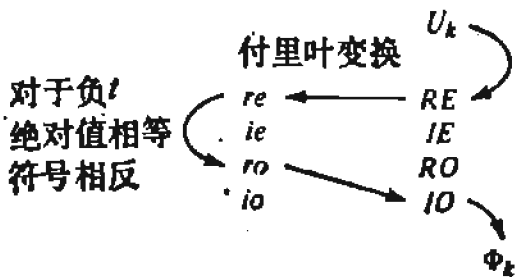


图 3-4  
相位函数的确定

为了说明得到虚奇部  $IO$  是很容易的, 我们借用第 2-8 节关于双线性变换讲过的积分滤波器。见图 3-5。

为了得到  $\Phi_k$ , 把  $U_k$  变换到时间域, 得  $u_t$ 。然后, 用图 3-5 中的实阶梯时间函数乘一下, 使得  $u_t^+ = u_0, u_1, \dots$ 。这意味着, 在频率域中  $U_k$  已同  $\delta_{k=0} + i$  ( $90^\circ$  相移滤波器) 作了褶积。这样就得出了  $\Phi$ 。

现在, 再如前一节中得到  $U^+(Z)$  那样, 研究一下在  $U(Z)$  中舍去所有的  $Z$  的负幂的做法。为简单起见, 考虑

$r_t$  是实数的情形。这时  $u_t$  也是实数

$$U(Z) = \dots + u_1 Z^{-1} + u_0 + u_1 Z + u_2 Z^2 + \dots$$

$$U = u_0(\cos 0) + 2u_1 \cos \omega + 2u_2 \cos 2\omega + \dots$$

用正弦替代上式中的余弦，建立一个新函数  $\Phi$

$$\Phi = 2u_1 \sin \omega + 2u_2 \sin 2\omega + \dots$$

由此  $U$  和  $i\Phi$  组合而得  $U^+$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(U + i\Phi) &= \frac{1}{2}u_0 + u_1 Z + u_2 Z^2 + \dots \\ &= U^+(Z) \end{aligned}$$

注意，把  $\cos t$  变成  $\sin t$  的变换称为  $90^\circ$  相移滤波。这里，我们把  $\cos \omega$  换为  $\sin \omega$ ，得到的  $U^+(Z)$  仅含  $Z$  的正幂了。

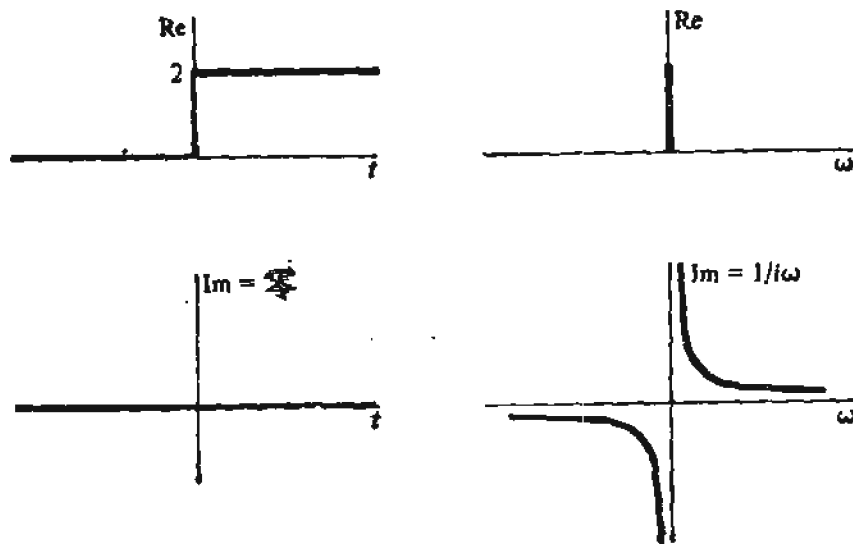


图 3-5

希尔伯特变换的对偶变换

柯尔莫廓洛夫谱因式分解用计算机计算是非常快的。因为它可以用快速付里叶变换。但是，这个方法的缺点是围绕单位圆求和与沿单位圆的积分总有一些误差。当谱较为简



单，而极点离单位圆很近时，陶布里兹法较为可取。图 3-6 中给出了做谱的因式分解的一个简单程序。

LX=4	LX MUST BE A POWER OF 2.
WRITE(6,FMT) (CX(I),I=1,LX)	PRINT THE TEST EXAMPLE.
CALL FORK(LX,CX,1.)	FOURIER TRANSFORM.
DO 10 I=1,LX	
10 CX(I)=.5*CLOG(CX(I)*CONJG(CX(I)))	FORM THE LOG OF THE SPECTRUM
CALL FORK(LX,CX,-1.)	BEGIN THE HILBERT TRANSFORM
K=LX/2	LX MUST BE EVEN
DO 20 J=2,K	LEAVE T=0 ALONE
CX(J)=CX(J)+CX(J)	DOUBLE VALUES AT POSITIVE TIME
20 CX(LX+2-J)=0.	ZERO VALUES AT NEGATIVE TIME
CALL FORK(LX,CX,+1.)	END HILBERT TRANSFORM
DO 30 I=1,LX	
30 CX(I)=CEXP(CX(I))	EXPONENTIATE
CALL FORK(LX,CX,-1.)	INVERSE FOURIER TRANSFORM
WRITE(6,FMT) (CX(I),I=1,LX)	PRINT MINIMUM PHASE WAVELET.

IN: ( 0.0, 0.0), ( 0.0, 8.0), (16.0, 0.0), ( 0.0, 0.0),  
 OUT: (15.6, -0.0), ( 0.0, -8.7), (-0.4, -0.0), ( 0.0, -0.7),

图 3-6

用快速付里叶变换和希尔伯特变换做谱因式分解的程序。复数运算是硬性规定了的。结果是近似的，因为沿单位圆的积分用了 4 点求和作近似。

### 练习

1. 在处理复时间函数时，图 3-4 中要添加哪些箭头？
2. 如果时间域与频率域对换一下，最小相位波的含义是什么？
3. 试说明：如何实现逆希尔伯特变换，已知  $\phi$  求  $u$ 。对得不到  $u_0$  这一事实作何解释？
4. 考虑一块地壳模型，其中  $x$  表示指北坐标， $+z$  表示地面上的高度，且地下分布的磁体未造成东—西向的磁场分量。可以证明地上磁场  $h$  可用下式表示。

$$\begin{bmatrix} h_x(x, z) \\ h_z(x, z) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \begin{bmatrix} -ik \\ |k| \end{bmatrix} e^{ikx - |k|z} dk$$

式中,  $F(k)$  是某一空间频率谱。

(a) 利用付里叶变换, 怎样从  $h_z(x, 0)$  计算  $h_x(x, 0)$ ; 反过来, 又怎样从  $h_x(x, 0)$  计算  $h_z(x, 0)$ ?

(b) 给定  $h_z(x, 0)$ , 怎样计算  $h_z(x, z)$ ?

(c) 注意, 于  $z=0$

$$w(x) = h_z(x) + ih_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} F(k) (|k| + k) dk$$

并且  $F(k) (|k| + k)$  是  $k$  的单边函数。通过一个总场磁强计, 可观察到

$$h_x^2(x) + h_z^2(x) = w(x) \overline{w}(x)$$

从这里能求出  $F(k)$  吗?

(d) 如果给定了  $w(x) \overline{w}(x)$ ,  $h_x(x)$  和  $h_z(x)$  要怎样才是唯一的?

### 3-6 因果原理与波的传播

因果原理, 即激发之前无响应, 给波的传播特性加了一定的限制。但因果律往往被违反, 这是由于:

1. 理论分析中为了简化而作的近似。
2. 对实验观测作了不合适的曲线拟合。
3. 由微分方程转换成差分方程时所作的近似。对因果原理的种种违反, 往往是由于在实际应用的频率范围以外的对谱频率的表面上不连贯的近似所引起的。由于在希尔伯特变换中收敛很慢, 表面不连贯的近似往往影响显著。上述1, 2对违反因果原理所造成的损失较之更精确地进行分析所要付出的代价可能要低些。而3或由于计算中违反了因果原理, 则将造成不可收拾的后果。即使差分方程在要研究的一

些频率上较为合宜，但对于其它频率，由于按指数律的增长，则可能形成完全求不出所需要的解的严重程度。

大多数波的传播理论，都是针对均匀介质，在频率域上进行研究的。如果进一步用笛卡尔坐标系进行研究，那么其结果是，沿  $x$  方向传播的波由下列关系式给出：

$$Y(x) = Y(0)e^{ikx} \quad (3-6-1)$$

波的理论能提供给我们的是关于  $k$  的一个表达式（通过频率和所有物理参数，诸如速度，弹性等等）。现在我们考虑一种“求微商之后”的情况，注意  $k(\omega)$ ，看它是否满足因果原理。(3-6-1) 式改换一个说法，它与图 3-7 中所述滤波情

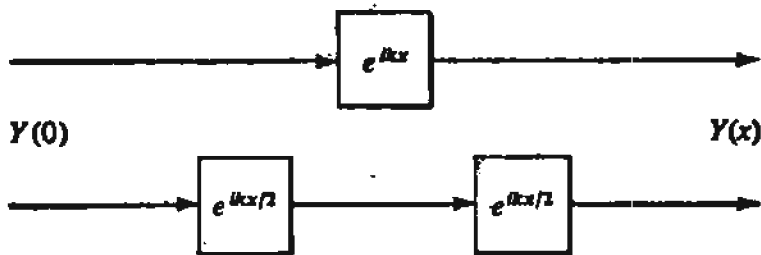


图 3-7

用滤波模拟波的传播

况类似。 $Y(0)$  是滤波输入， $Y(x)$  类似于输出， $e^{iks}$  是模拟波传播效应的滤波器。问题在于，这类滤波器是不是单边函数。这个问题又取决于  $k(\omega)$  的具体形式。

首先，考虑一种简单情况，即对全部实  $\omega$  来说  $k(\omega)$  是实的情况。此时， $e^{ikx}$  是一个全通滤波器。如 2-6 节中证明过的，仅当  $k(\omega)x$  是  $\omega$  的单调递增函数时，它才是物理可实现的。

其次，假定  $k(\omega)$  取复值，这意味着有衰减。显然，能量守恒原理要求  $ikx$  的实部是负的。令  $P(Z)$  是一个物理可实现的全通滤波器，并令  $B(Z)$  为一个物理可实现的最小

相位子波。任何物理可实现函数都能用  $B(Z)P(Z)$  形式来表示。我们将把  $e^{ikx}$  表示成如下形式

$$B(Z)P(Z) = e^{ikx} = \exp[i(k_r + ik_i)x] \quad (3-6-2)$$

对上式取对数，用  $\phi$  表示相位，得

$$\ln|B| + i\phi_B + i\phi_P = -k_1x + ik_r x \quad (3-6-3)$$

分离实部与虚部，分别得

$$\ln|B| = -k_1x$$

$$\phi_P = k_r x - \phi_B$$

首先，从衰减  $-k_1x = \ln|B|$  来看，我们可以用希尔伯特变换来计算  $\phi_B$ 。再从  $k_r x$  减去  $\phi_B$ ，就得到全通滤波器的相移  $\phi_P$ 。回想第 2-6 节（关于全通滤波器）中曾讲过，仅当  $\phi_P$  单调递增时，可得到一个表因的全通滤波器。总之，检验函数  $k(\omega)$  是否符合因果原理的办法，是计算  $\phi_P(\omega)$ ，并看它是否对所有频率单调递增。

许多混乱是由衰减定律引起的，这些衰减定律形为  $k_i \simeq \omega^2$ （高斯衰减律）或  $k_i \simeq |\omega|$ （有时称为常量  $Q$ ）。引起混乱的原因是这些函数不可积，所以它们都没有收敛的希尔伯特变换；即：它们的  $\phi_B$  是无界的。这些函数对应的时间函数是与高斯时间函数  $e^{-t^2}$  相类似的时间脉冲函数，而高斯函数在任一时刻之前都不为零。这样一些函数就不能严格地归为一表因过程。然而，它们可给出一些极好的实用的近似。由于  $\phi_B$  与  $\phi_P$  相加，衰减还会造成相位速度上的错乱，不过这一般都测量不出来。

现在举一个计算机模拟波的传播过程的例子。最简单的例子是无耗损的传播。这时， $k = \omega/u$ ，其中  $u$  是速度。我们设计一个模拟波传播  $\Delta x$  距离的滤波器，接连使用这个滤波器  $N$  次，就相当于波传播了  $x = N\Delta x$  距离了。我们将

利用指数的幂级数双线性变换截断。

$$e^u \approx \frac{1 + \frac{u}{2}}{1 - \frac{u}{2}} \quad (3-6-4)$$

和对  $i\omega \Delta t$  的双线性表示, 即

$$i\omega \Delta t \approx 2 \left( \frac{Z-1}{Z+1} \right) \quad (3-6-5)$$

根据上述  $k = \omega/u$ , 并记  $a = \Delta x/u \Delta t$ , 可得:

$$\begin{aligned} e^{ik\Delta x} &\approx e^{\widehat{ik\Delta x}} = \frac{1 + a \left( \frac{Z-1}{Z+1} \right)}{1 - a \left( \frac{Z-1}{Z+1} \right)} \\ &= \frac{(Z+1) + a(Z-1)}{(Z+1) - a(Z-1)} \\ &= \frac{(1-a) + (1+a)Z}{(1+a) + (1-a)Z} \quad (3-6-6) \end{aligned}$$

它符合全通滤波器的一般形式, 这只要取  $Z_0 = -(1+a)/(1-a)$  便可看出。这样, (3-6-6) 变成

$$e^{\widehat{ik\Delta x}} = \frac{-1/Z_0 + Z}{1 - Z/Z_0} \quad (3-6-7)$$

分母是最小相位, 且当  $Z_0 > 1$  或者  $\Delta x/v \Delta t > 0$  时, 这个全通滤波器是物理可实现的。这就说明, 如果波是按  $+x$  方向投射出去的, 那么当前的和过去的输入值便可确定它的输出值。如果在空间中反方向 ( $\Delta x$  为负) 投射, 则  $\Delta t$  必须取为负的。

这样，当前的和将来的输入值才能确定当前的输出值。

### 练习

1. 在(3-3-6)表示的滤波器中，置  $a = 0.1, 1$  和  $2$ ，求速度误差(作为  $\omega$  的函数)。提示：令  $\hat{k} = \omega/\hat{v}$ ，所以  $v/\hat{v} = \hat{k}v/\omega$ 。注意：

$$\begin{aligned} i \hat{k} \Delta x &= \ln e^{i \hat{k} \Delta x} = \ln Z + \ln \left( \frac{-1}{Z_0 Z} + 1 \right) - \ln \left( 1 - \frac{Z}{Z_0} \right) \\ &= +i\omega \Delta t - 2 \ln \left( 1 - \frac{Z}{Z_0} \right) \end{aligned}$$

## 第4章 分辨率

在布置天然地震测点或石油钻井定井位时，定的位置往往不准确，这是由于测量误差或目的物大小引起的位置的误差，记为  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 。测量电压时总带有一个测量精度，记为  $\Delta v$ 。有效地震波的频率具有带宽  $\Delta \omega$ 。地震勘探中的放炮，爆炸有一个持续时间  $\Delta t$ ，这说明了爆炸时间的不准确性。测量时，经常要求使这些量  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta v, \Delta \omega$  及  $\Delta t$  等等) 尽可能地减小，以提高准确度和分辨率。各种分辨率的度量（诸如，离差，容差，不准确度，带宽，持续，跨度等等）之间，有些是相互影响的。根据实际需要，有时想使其中一个量减小一点，却又必须同时增大另一个或好几个量。本章的目的，就是讨论某些普遍存在的这种矛盾着的相互作用的情况。

这一章中， $\Delta t$  表示信号的时间持续， $\tau$  表示两相邻采样点之间的时间间隔。而在其它章节中， $\Delta t$  和  $\tau$  表示同一个量，都是采样间隔。

### 4-1 时间与频率的分辨率

亚原子粒子的属性同波类似，波的频率与粒子动量成正比，从这一事实得出了量子力学中著名的“测不准原理”。古典力学的定律可以从力学系统当前的位置和动量进行外推，预测该系统的将来。但是，由于波具有动量与频率成比例的特性，作这类预测时就需要同时知道波的频率和位置。我们

知道,正弦波具有完全确定的频率,可是它的波形沿时间轴无限铺开。另一个极端是  $\delta$  函数,它的波形虽然很规矩地被压缩在时间轴的某一点上,但它却是各种频率的混合体。数学上对“测不准原理”所作的分析就是对函数作付里叶变换并进行讨论和分析。

在进行这种分析时,首先要对时间持续和谱的带宽等给出定义,作为分辨率的度量。如果时间持续指的是非零函数值的跨度,则衰减指数函数的时间持续便是无穷大。为了适合各种用途,我们规定:一个函数的时间跨度为其振幅衰减到初值的  $e^{-1}$  时所需的时间。对许多函数来说,时间跨度定义为:曲线(或曲线的包络)下降到其最大值的一半处,时间轴(或频率轴)上的两点之间的间距。其主要想法是,时间跨度  $\Delta t$  或频率跨度  $\Delta\omega$  应能包含总能量的大部分,而又不必包含全部能量。 $\Delta t$  和  $\Delta\omega$  的定义有某种任意性,可根据分析的方便来选取。一般命题是:对任一函数,其时间持续  $\Delta t$  和谱的带宽  $\Delta\omega$  之间有下列关系

$$\Delta\omega\Delta t \geq 2\pi \quad (4-1-1)$$

在许多特殊情况下,虽然验证(4-1-1)是容易的,但要把(4-1-1)推广为一般性原理并不很容易。然而盖保(Gabor)已做了这项工作<sup>[17]</sup>。他用了二阶矩来定义  $\Delta t$  和  $\Delta\omega$ 。

一种类似的,也许比时间和频率跨度的乘积更为基本的概念,是谱的带宽与系统响应函数的“起升”时间之间的关系。系统响应函数的“起升”时间  $\Delta t$  的定义也带某种任意性。通常规定为激发时刻和系统响应达到其主值一半时刻之间的时间跨度。原则上讲,时间上的快速“起升”及快速“衰落”都会引起宽频响应。于某个“起升”时间之后紧接着就是一个相等的“衰落”时间,在(4-1-1)不等关系中就“紧



密”一些。“起升”时间和“衰落”时间之间的不等性增大了，(4-1-1)不等关系中就“松散”一些。许多系统，其响应比其随后的衰落要快很多。我们将集中研究这样的系统。先要设法推导出类似于(4-1-1)的用于“起升”时间和带宽的不等式。其第一步是选好“起升”时间的定义，此定义不但要明确和实用，而且要保证往后进行的分析能够贯通。我们已经找到了“起升”时间的一种合理的定义

$$\Delta t = \frac{\int_0^{\infty} b(t)^2 dt}{\int_0^{\infty} \frac{1}{t} b(t)^2 dt} \quad (4-1-2)$$

其中  $b(t)$  是所研究的响应函数。分子正好是一个规格化因子。分母表明我们用了负一阶矩来定义  $\Delta t$ 。例如：当  $b(t)$  是一个阶梯函数时，那么分母中积分发散，“起升”时间  $\Delta t = 0$ 。当  $b(t)^2$  自到  $t_0$  线性地增长，随后又变成 0，那么“起升”时间  $\Delta t$  为  $t_0/2$ ，这再一次说明了此定义的合理性。

虽然 Z 变换方法对于研究遇有发散（如  $1/t$ ）的情形很起作用。但它的缺点是破坏了在时间域和频率域之间形式上的一致性。考虑到这个缺点并不太要紧，因为我们总可以通过取极限从离散时间域过渡到连续时间域。为了使 Z 变换分析简化。我们现在考虑“起升”时间上的对偶问题。这里，作为单边时间函数的对偶，我们特研究在负频率恒为零的谱函数  $\overline{B}(1/Z)B(Z)$ 。想度量一下，它在  $\omega = 0$  之后“起升”有多快。将会发现，这与它对应的时间函数  $b(t)$  的时间持续  $\Delta t$  有关。更确切地说，作为 (4-1-2) 的类比，我们定义最低的有效频率分量  $\omega = \Delta\omega$  为

$$\Delta\omega = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{B} B d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \overline{B} B d\omega} \quad (4-1-3)$$

不失一般性，我们可假定谱已规格化了，所以分子积分为1，换句话说， $b(t)$ 的自相关在零滞后的值为+1。于是

$$\frac{1}{\Delta\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \overline{B} B d\omega \quad (4-1-4)$$

我们要借助于双线性变换，因为它可给我们提供关于 $(-i\omega)^{-1}$ 的各种 $Z$ 变换表达式。我们通常使用的是积分 $(\dots 0, 0, 0.5, 1, \dots 1, \dots)$ 。也可使用 $(\dots 1, 1, 1, 0.5, 0, 0, 0, \dots)$ 。若正好在单位圆上有极点，会产生不唯一性问题。由于 $1/i\omega$ 是虚奇频率函数，我们所需要的展开式为由下式给出的奇时间函数，即

$$(-i\omega)^{-1} = \frac{(\dots - Z^{-2} - Z^{-1} + 0 + Z + Z^2 + \dots)}{2} \quad (4-1-5)$$

把(4-1-4)转换或用 $Z$ 变换表示的单位圆上的积分，得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta\omega} &= \int_{-\infty}^{+\infty} -i \frac{1}{-i\omega} \overline{B} B d\omega \quad (4-1-6) \\ &= \frac{-i}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2} (\dots - Z^{-2} - Z^{-1} + Z + Z^2 + \dots) \\ &\quad \overline{B} \left( \frac{1}{Z} \right) B(Z) d\omega \end{aligned}$$

但是，由于这个积分等于积分变量的 $Z$ 的系数，得

$$\frac{1}{\Delta\omega} = \frac{-i}{4\pi} [(r_{-1} - r_1) + (r_{-2} - r_2) + \dots] \quad (4-1-7)$$

式中  $r_t$  是  $b_t$  的自相关函数，这可以进一步表示为

$$\frac{1}{\Delta\omega} = \sum_{t=1}^{\infty} \text{Im}(-r_t) \leq \sum_{t=1}^{\infty} |r_t| \quad (4-1-8)$$

(4-1-8)中的求和，相当于求  $|r_t|$  函数下的面积所作的积分。设想  $|r_t|$  函数用一个等面积的矩形函数所替代了。这就给  $|r_t|$  函数确定了一个自相关函数的时间持续  $\Delta t$  自相关。任何自相关函数都满足  $|r_t| < r_0$ ，并且我们已作了规格化  $r_0 = 1$ 。于是，不等式(4-1-8)可写为

$$\frac{1}{\Delta\omega} \leq \sum_{t=1}^{\infty} |r_t| < \Delta t \text{ 自相关} \quad (4-1-9)$$

最后，还必须把时间函数的持续  $\Delta t$  与它的自相关的持续  $\Delta t$  自相关联系起来。一般说来，找一个自相关短而时间函数本身持续较长是容易的。这只要取一个任意的短时间函数，用一个长的和弯曲的全通滤波器同它褶积，得出的这个新函数的时间持续便是长的，而它的自相关是短的。如果一个时间函数有几个非零点，那么它的自相关函数只有  $(2n-1)$  个非零点。显然，一个短的时间函数，不可能有长的自相关函数。要设计一个时间函数使其自相关函数尽可能地长一些，最好的做法是把能量集中成两块，在时间函数的两端各置一块。即使从这样极端的例子也可以看到，认为

$$\Delta t \geq \Delta t \text{ 自相关} \quad (4-1-10)$$

并没有什么不合理的地方。代入 (1-1-9)，得出测不准关

系式

$$\Delta t \Delta \omega \geq 1 \quad (4-1-11)$$

测不准原理更常见的数学表达形式中是使用频率变量  $f = 2\omega$  (译注: 应为  $f = \omega/2\pi$ ) 和  $\Delta t$  的另一种定义, 即:  $\Delta t$  是“时间持续”而不是“‘起升’时间”。此时关系式为

$$\Delta t \Delta f \geq 1 \quad (\Delta t \text{ 是时间持续}) \quad (4-1-12)$$

给“起升”时间乘以  $2\pi$  比例因子从而把“起升”时间转换为时间持续, 表明了此不等关系的近似性质。

### 练习

1. 考虑  $B(Z) = [1 - (Z/Z_0)^n] / (1 - Z/Z_0)$ , 当  $Z_0$  趋近于单位圆的极限情形。试描绘其时间函数及时间函数的平方的幅值。描绘其频率函数及频率函数的平方幅值, 选择  $\Delta f$  和  $\Delta t$ 。

2. 由两种频率组成的时间序列可表示为

$b_t = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t + C \cos \omega_2 t + D \sin \omega_2 t$  已知  $\omega_1, \omega_2, b_0, b_1, b_2, b_3$ , 试说明怎样计算这两个正弦分量的相位角和振幅。

3. 设一频率函数图形如下:

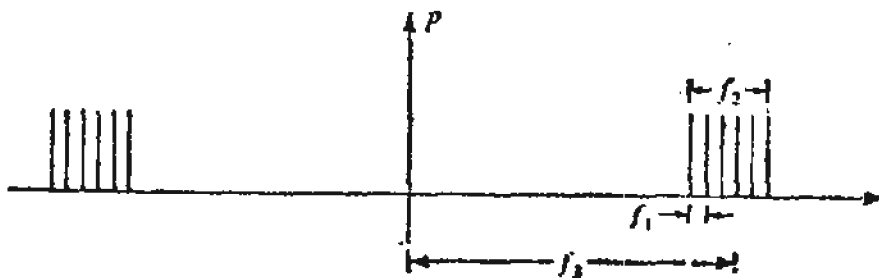


图 4-1-3

试粗略地描述其时间函数, 指明对应于  $1/f_1, 1/f_2, 1/f_3$  的时间。试绕过代数计算, 描绘一个近似结果。

研究题:

试探求一种给单边子波定义  $\Delta\omega$  和  $\Delta t$  的方法, 使得测不准原理 (不等关系式) 仅对最小相位子波取等号。

#### 4-2 时间与统计分辨率

将一个硬币掷 100 次, 有可能恰好出现币值面朝上和朝下各为 50 次, 而一般常见的是各在 60~40 和 40~60 之间。试问: 能事先说准偏离 50 多少吗? 平均值 (均值) 应为 50, 而由随机采样得到的几乎都不是 50。从采样得到的平均值称为采样的均值。我们想知道采样均值与真均值之间究竟有多大差别。均方差称为采样均值的变差。采样次数很多时, 算出的采样均值应该比次数少的采样均值更接近于真平均。这种想法就导致了在估计均值中可能产生的误差与采样大小之间的一种测不准关系。

更确切一点说, 掷  $n$  次硬币并且设想  $n$  趋于无穷, 就能得到其均值的“真值”。确定“真值”更为方便的办法是设想在同等条件下, 由无穷多个人分别做同一试验 (构成一个总体)。这样一种设想能使我们定出随时间而改变的关于硬币的时变均值。

使用总体这一概念, 往往受到来自搞统计基础理论的人和使用统计方法从事实验的人这两方面的攻击。大多数地球物理文献还都接受这一观察不到的总体是存在的假设, 并以此作为一种研究手段。提倡使用总体概念的人, 比起反对使用这个概念的人更占优势, 因为有了这个概念, 在数学上更好处理 (更便于解释)。所以, 我们也采用总体这个概念。

在总体上的平均, 称为期望, 用符号  $E$  表示。在总体上求和就不写什么下标, 每个随机变量则记一个下标。于是

在时刻  $t$  的真平均可记为

$$m_t = E(x_t) \quad (4-2-1)$$

如果平均值不随时间变化, 可记为

$$m = E(x_t) \quad (\text{全部 } t) \quad (4-2-2)$$

类似地, 我们对  $x_t$  的方差性质也感兴趣。方差是偏离平均值差异的一种度量。方差的定义如下

$$\sigma_t^2 = E[(x_t - m_t)^2] \quad (4-2-3)$$

随机变量  $x_t$  的特征可以通过  $\sigma$  或  $m$  或两者同时是否随时间变化来规定。如果  $\sigma$  与  $m$  (关于时间  $t$ ) 都是常量, 有

$$\sigma^2 = E[(x_t - m)^2] \quad (4-2-4)$$

处理代数表达式时, 符号  $E$  的作用类似于求和记号, 即

$$E = (\lim_{n \rightarrow \infty}) \frac{1}{n} \sum_1^n \quad (4-2-5)$$

注意, 这里没有给出求和的下标, 因为求和是在总体上进行的, 而不是在某段时间上求和。

现设  $x_t$  是相互独立分布的随机数组成的一个时间序列, 这些随机数的  $m$  和  $\sigma$  与时间无关。假定, 我们有了  $x_t$  的  $n$  个点的采样, 试确定其  $m$  的值。我们可用下式建立均值  $m$  的估计量  $\hat{m}$ 。

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t \quad (4-2-6)$$

严格一点估计均值的方法应取其加权平均。设  $w_t$  为一组规格化了的加权系数, 即

$$\sum w_t = 1 \quad (4-2-7)$$

利用这些权系数, 均值的估计量  $\hat{m}$  为

$$\hat{m} = \sum w_t x_t \quad (4-2-8)$$

实际上, (4-2-6) 是 (4-2-8) 中权系数取  $w_t = 1/n; t = 1, 2, \dots, n$  的特例。

本节的目的是确定对长度为  $n$  的采样, 其由估计得出的均值  $\hat{m}$  与真均值  $m$  大概相差多少。这个差  $\Delta m$  的一种可能的定义为

$$(\Delta m)^2 = E\{(\hat{m} - m)^2\} \quad (4-2-9)$$

$$= E\{[(\sum w_t x_t) - m]^2\}. \quad (4-2-10)$$

由等式  $m = m \sum w_t = \sum w_t m$ , 得到

$$(\Delta m)^2 = E\left\{\left[\sum_t w_t (x_t - m)\right]^2\right\} \quad (4-2-11)$$

$$= E\left\{\left[\sum_t w_t (x_t - m)\right] \left[\sum_s w_s (x_s - m)\right]\right\} \quad (4-2-12)$$

$$= E\left[\sum_t \sum_s w_t w_s (x_t - m) (x_s - m)\right] \quad (4-2-13)$$

我们可以把求期望符号  $E$  当作一种求和符号, 移到对  $t$  和  $s$  求和的记号里面去

$$(\Delta m)^2 = \sum_t \sum_s w_t w_s E[(x_t - m)(x_s - m)] \quad (4-2-14)$$

由于  $x_t$  和  $x_s$  的随机性, 等式右边求期望, 也就是在整个总体上求和, 除  $s = t$  外, 都为零。当  $s = t$  时, 期望就是 (4-2-4) 所定义的方差了。于是, 我们得

$$(\Delta m)^2 = \sum_t \sum_s w_t w_s \sigma^2 \delta_{ts} \quad (4-2-15)$$

$$= \sum_t w_i^2 \cdot \sigma^2 \quad (4-2-16)$$

$$\Delta m = \sigma \left( \sum_t w_i^2 \right)^{1/2} \quad (4-2-17)$$

最后，考察一下  $n$  个加权系数每个都为  $\frac{1}{n}$  时得出的结果。在这种情况下，得

$$\Delta m = \sigma \left[ \sum_1^n \left( \frac{1}{n} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{\sigma}{n^{1/2}} \quad (4-2-18)$$

这是随机数不容易直观看出来的最重要的一个性质。对均值为零的情况，这性质可用这样的话来表达：“ $n$  个幅值为 1 的随机数相加，得到的幅值约等于  $n$  的平方根”。

对于具有时变均值的随机序列作均值估计时，会遇到一种困难的情况。当你在求和中多放进一些随机数想使  $\Delta m$  变小时，而  $m$  又是随时间改变的。反之，当你从该序列的一个短采样中计算  $\hat{m}$  时，它又偏离真的  $m$  很大（因为在任一时刻， $m$  是通过对总体的求和得到的）。

设想对一时间序列每隔  $\tau$  秒作一次采样。令  $\Delta t = n\tau$  为采样长度。那么 (4-2-18) 可写为

$$(\Delta m)^2 \Delta t = \sigma^2 \tau \quad (4-2-19)$$

显然，要求  $(\Delta m)$  与  $\Delta t$  都尽可能地小。如果原来的随机数  $x_t$  是彼此相关的，例如，如果  $x_t$  近似于一个连续函数，那么这  $n$  个数的和不致于相消成为  $n$  的平方根。这种情况用不等式表示为

$$(\Delta m)^2 \Delta t \geq \sigma^2 \tau \quad (4-2-20)$$

不等式 (4-2-20) 可称之为精度和时间的分辨率之间的测不



准关系。

考虑另一组加权系数，可以对  $\Delta t$  给出一个比  $\tau$  乘以权

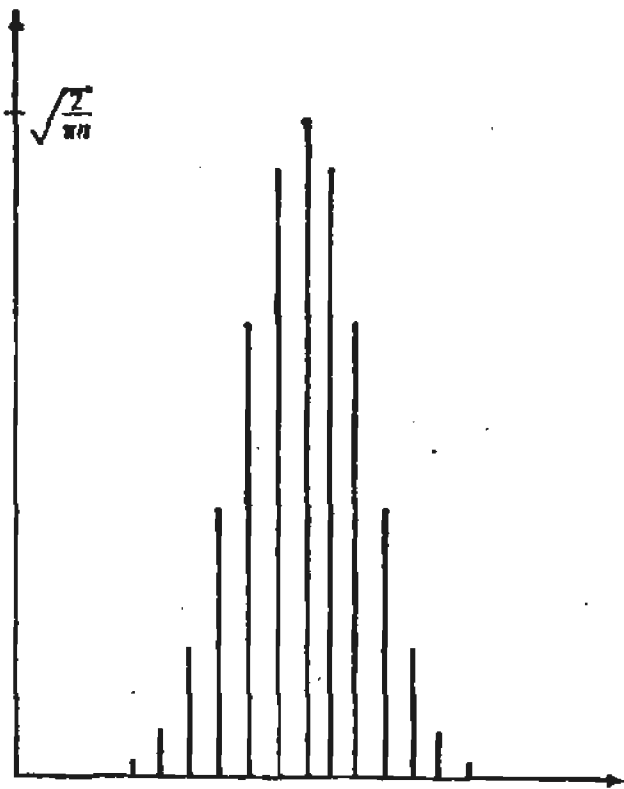


图 4-1

二项式系数趋近于高斯函数。图中绘的是  $(0.5 + 0.5Z)^{20}$  中  $Z^i$  的系数。

系数个数更为直观的定义。譬如，如果权系数  $w_t$  取自图 4-1 中所示的高斯函数的采样，那么  $\Delta t$  可以取其半振幅点之间的间距，即  $1/e$  点之间的间距，含有函数曲线下，面积的 95% 的时间跨度，或其它一些“直观性解释”。显然， $\Delta m$  和  $\Delta t$  的定义改变了，(4-2-10) 的不等关系也就不完全适用了。

给定一个均值为零的随机时间序列  $x_t$ ，我们可以定义另一个序列  $y_t$ ， $y_t = x_t^2$ 。估计  $x_t$  的方差

$\sigma^2 = p$  的问题，变成了估计  $y_t$  的均值  $m$ 。如果采样短，可以期望误差  $\Delta p$  落在我们对方差的估计范围内。在学术论文中，都喜欢把真平均值写成

$$m = \hat{m} \pm \Delta m \tag{4-2-21}$$

$$= \hat{m} \pm \sigma / \sqrt{n} \tag{4-2-22}$$

但是由于方差  $\sigma^2$  常常也是未知的，这就需要用到方差的估计  $\hat{\sigma}$ ，即

$$m = \hat{m} \pm \hat{\sigma} / \sqrt{n} \tag{4-2-23}$$

当然，(4-2-23) 实际上并不正确，因为  $\hat{\sigma}$  有误差，我们应对

(4-2-23) 补充说明, 由于 $\hat{\sigma}$ 误差带来的测不准性。而估计这个误差又会有误差, 如此没完没了。为了真实可靠地表达这个结果, 要用概率密度函数计算所需要的 $E(x^n)$ 。概率密度函数是能从数据或从理论上估计的。实际上, 常常可采用高斯函数, 其理由在后面有一节将予以说明。在练习中证明有下列关系式

$$\Delta p = p \sqrt{\frac{2}{n}} \quad (4-2-24)$$

由于 $\Delta t = n\tau$ , 上式两边平方得

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 \frac{\Delta t}{2} \geq 1 \quad (4-2-25)$$

如果随机数 $x_t$ 并非完全不可预测, 这个不等式还适用。如果 $x_t$ 近乎是一个连续函数, 那么, 其预测性极好, 在这不等关系中就极为松散。

相关类似于求余弦法。两个向量之间的夹角用其余弦来度量, 即该向量的点乘除以它们两者的长度

$$c = \frac{(x \cdot y)}{[(x \cdot x)(y \cdot y)]^{1/2}}$$

相关也是这么个公式, 无非 $x$ 与 $y$ 是标量的随机变量而已。所以在式中不出现向量的下标, 而是隐式的总体的下标。而随机变量的相关, 定义为

$$c = \frac{E(xy)}{[E(x^2)E(y^2)]^{1/2}}$$

实际上, 不会有一个总体。都是用采样平均来模拟总体平均。这样做对于小采样就有问题, 而对于只含一个元素的采样问

题变更为尖锐。这时，无论随机数  $x$  或随机数  $y$  取什么值，其采样的相关为

$$\hat{c} = \frac{xy}{|x||y|} = \pm 1$$

事实上，可以看出，采样的相关  $\hat{c}$  总是在零的两边摆动。

无疑，这不算什么“发现”。相干性估计的偏倚与变差的研究是一个复杂问题。但凭经验，对一个大小为  $n$  的采样来说， $\hat{c}$  的偏倚与变差大概可期望为  $1/\sqrt{n}$  这么一个数量级。

### 练习

1. 设随机数采样的均值用三角加权函数估计，即

$$\hat{m} = s \sum_{i=0}^n (n-i)x_i$$

试求标量因子  $s$ ，使  $E(\hat{m}) = m$ 。计算  $\Delta m$ ，试规定一合适的  $\Delta t$ 。考查其测不准关系式。

2. 具有时变均值的随机序列  $x_t$ ，可由下列反馈方程来估计其均值

$$\hat{m}_t = (1 - \varepsilon) \hat{m}_{t-1} + b x_t$$

(a) 把  $\hat{m}_t$  表达成  $x_t, x_{t-1}, \dots$  的函数，而不用  $\hat{m}_{t-1}$ 。

(b) 求有效平均时间  $\Delta t$ 。

(c) 求标量因子  $b$ ，使得当  $m_t = m$  时， $E(\hat{m}_t) = m$ 。

(d) 计算随机误差  $\Delta m = [E(\hat{m} - m)^2]^{1/2}$  [当  $\varepsilon$  趋于 0 时，结果趋于  $\sigma(\varepsilon/2)^{1/2}$ ]。

(e) 问：在这种情况下  $(\Delta m)^2 \Delta t$  有怎样的关系式？

3. 证明

$$(\Delta P)^2 = \frac{1}{n} [E(x^4) - \sigma^4]$$

4. 给定一独立的, 均值为零的时间序列  $x_t$ , 试赋予  $x_t$  一个使它可达到各种振幅值的概率密度, 研究此序列的特性, 计算  $E(x_1)$ ,  $E(x_1^2)$ ,  $(\Delta P)^2$ 。参看概率论的书, 令  $x_1$  具有高斯概率密度函数。

$$\text{提示: } P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$\text{且 } \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} \cdot a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

### 4-3 频率与统计分辨率

长期对海面观察的结果, 可以用一些统计平均 (诸如平均高度  $m$  及方差等等) 来进行整理。用于这种地球物理时间序列的另一类很重要的统计平均是“功率谱”。有些数学模型只解释数据的统计平均而不解释数据本身。为了引起兴趣和理解有关功率谱的一些基本限定, 我们首先考虑一个理想化的例子。

设  $x_t$  是由独立地抽取的随机数组成的时间序列。假定我们有了  $n$  个这样的随机数, 可定义该数据采样的多项式  $X(Z)$

$$X(Z) = x_0 + x_1 Z + x_2 Z^2 + \cdots + x_{n-1} Z^{n-1} \quad (4-3-1)$$

还可以用上述的随机数采样造一个功率谱估计量  $\hat{R}(Z)$

$$\hat{R}(Z) = \frac{1}{n} \bar{X} \left( \frac{1}{Z} \right) X(Z) \quad (4-3-2)$$

它与以前定义的谱的区别, 是“功率”谱多了一个除数  $n$ , 这是为了随采样个数  $n$  变化而线性增长时, 保持其所期望的结果。

功率谱的定义是 $\hat{R}$ 的期望值, 即

$$R(z) = E[\hat{R}(z)] \quad (4-3-3)$$

实际定义应该是让 (4-3-2) 中的  $n$  趋于无穷。但这样定义会有问题, 这也正是本节要讨论的主题。具体说来, 从图 4-2 可以肯定,  $\hat{R}(z)$  是一个比  $R(z)$  更“毛刺”的函数。

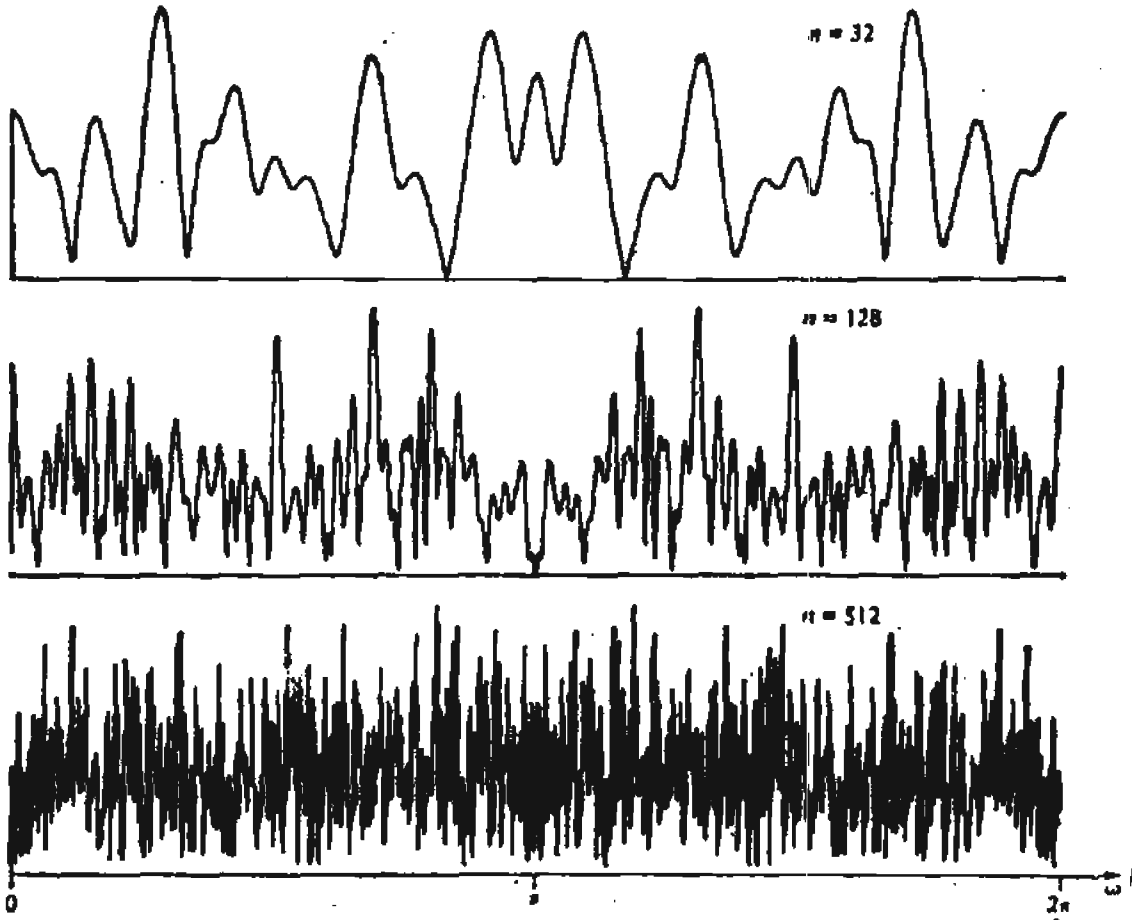


图 4-2

$n$  个随机数采样的振幅谱  $[\hat{R}(Z)]^{1/2}$ 。这些函数 ( $n=512$  与  $n=32$  一样) 差不多是在同一幅度内摆动。当  $n$  趋于无穷时, 肯定是越来越快速地上下摆动。

所以

$$R(Z) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{R}(Z) \quad (4-3-4)$$

为了理解为什么会这样, 我们来看一下 (4-3-2) 中  $z$  的同次幂的系数。我们有

$$\hat{r}_k = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-k-1} \hat{x}_t x_{t+k} \quad k = -n+1 \text{ 到 } n-1 \quad (4-3-5)$$

对于实时间序列  $x_t = \hat{x}_t$ , (4-3-2) 可写成

$$\hat{R} = \hat{r}_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \hat{r}_k \cos k\omega \quad (4-3-6)$$

我们考查一下 (4-3-6) 在  $n$  变大时的情形。为此, 我们需要知道随机数的某些统计特征。设它们的均值为零  $m = E(x_t) = 0$ , 且有相同的方差  $\sigma^2 = E(x_t^2)$ , 我们假定具有独立性, 从而  $E(x_t x_{s+t}) = 0$ , 当  $t \neq s$ 。由于有随机起伏, 我们知道,  $\hat{r}_0$  将是  $\sigma^2$  加上随采样点数的增加而按  $1/\sqrt{n}$  递减的随机起伏分量。即

$$\hat{r}_0 = \sigma^2 \pm \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}} \quad (4-3-7a)$$

同样,  $\hat{r}_1$  应该为 0, 但按 (4-3-5) 定义, 我们只能说它也有一个起伏分量

$$\hat{r}_1 = \pm \frac{n-1}{n} \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}} \quad (4-3-7b)$$

对于第  $k$  ( $k > 1$ ) 个相关值, 其起伏范围为

$$\hat{r}_k = \pm \frac{n-k}{n} \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}} \quad (4-3-7c)$$

图 4-3 中给出了按一组具体的随机数计算 (4-3-7) 得到的结果。现在我们可设想: 当  $n$  趋于无穷时, 这些起伏项皆趋于 0, 且 (4-3-2) 取极限形式  $\hat{R} = \sigma^2$ 。这样下结论是不对的。理由是: 虽则各个起伏项与  $1/\sqrt{n}$  同阶, 但是 (4-3-6) 中求和含有  $n$  个这样的项。幸好, 这些项随机地彼此互相抵销了,

所以它们的和并不按 $\sqrt{n}$ 发散。回想一下， $n$ 个绝对值为1而具有随机符号的数加起来得到的随机数在 $\pm\sqrt{n}$ 范围内。于是(4-3-6)求和的结果

$$\hat{R} \approx \left(1 \pm \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) \sigma^2 = (1 \pm 1) \sigma^2 \quad (4-3-8)$$

这就得到了一个基本结论：根据随机数采样的能量密度来估计得到的功率谱，随频率及采样的不同而起伏，其大小相当于期望的谱。

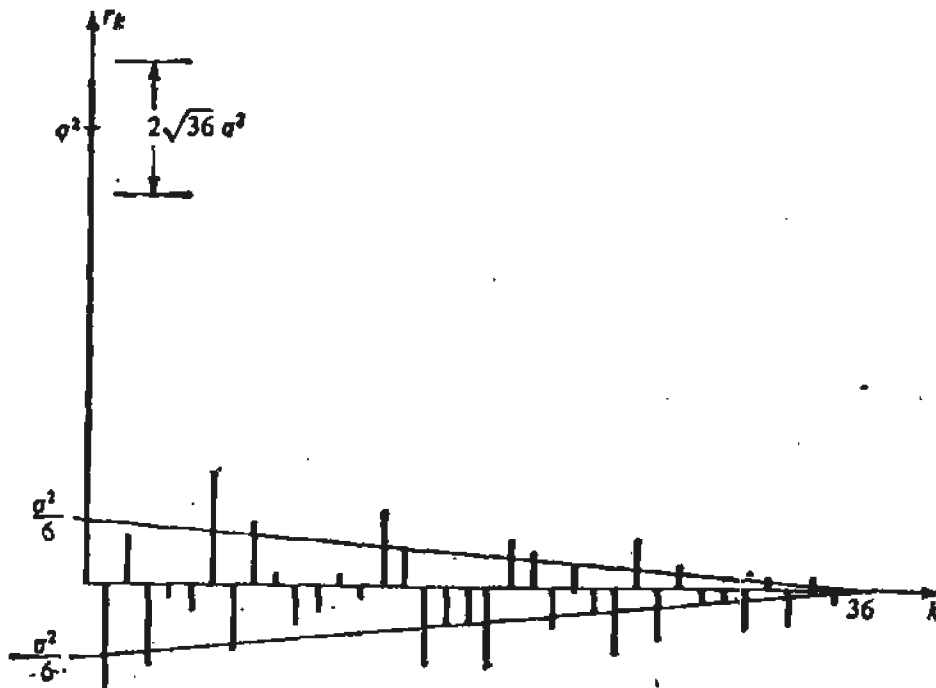


图 4-3

36个随机数的自相关正滞后图

很显然，令 $n$ 趋于无穷大，我们得不到理论上的结果 $\hat{R} = \sigma^2$ 。问题在于：当我们增大 $n$ 时，只增大了其频率分辨率而未增加其统计分辨率。为此，就需要模拟总体平均。这有两种途径可循：(1) 取 $n$ 个点的采样并把它分成 $k$ 个等长度的段。每段为 $n/k$ 个点。计算每段的 $R(\omega)$ ，然后把这 $k$ 个

$R(\omega)$  统统加在一起。(2) 根据  $n$  个点的采样算出  $R(\omega)$ 。分成  $n/2$  个独立的振幅，每一个都用其  $k$  个最靠近的相邻值的平均来替代。不管是采用方法 (1) 或方法 (2)，都能求出  $\Delta f = 0.5k/n\tau$ ,  $(\Delta p/p)^2 = (\text{平均自由度个数的倒数}) = \frac{1}{k}$ 。

于是有

$$\Delta f \left( \frac{\Delta p}{p} \right)^2 = \frac{0.5}{n\tau}$$

如果有些数据没被利用，或者未被有效地利用，我们得到通常的不等式：

$$\Delta f \left( \frac{\Delta p}{p} \right)^2 \geq \frac{0.5}{n\tau}$$

可见，如有足够的数据 ( $n$  充分大)，就能得到我们所希望的较好的分辨率。否则，改善了统计分辨率就要牺牲一些频率分辨率，反过来也是一样。

最好是采取一种折衷办法，不但考虑  $\Delta f$  与  $\Delta p$  之间的关系，而且把其数据采样的时间持续  $\Delta t = n\tau$  也考虑进来。认定数据采样的时间持续确为  $\Delta t = n\tau$ 。我们得不等式

$$\Delta f \Delta t \left( \frac{\Delta p}{p} \right)^2 > \frac{1}{2} \quad (4-3-9)$$

在下一节中将从略微不同的观点推导出不等式 (4-3-7)，并对它作进一步的解释。

在时间序列分析中，有相干的概念，它是与 4-2 节所定义的相关概念相类似的。如对于两个随机变量  $x$  与  $y$

$$c = \frac{E(xy)}{[E(x^2)E(y^2)]^{1/2}}$$

现在，当  $x_t$  和  $y_t$  是两个时间序列，它们之间也可能有某种时间延迟、比例甚或滤波的关系，例如，也许有  $Y(Z) =$



$F(Z)X(Z) + N(Z)$ , 其中  $F(Z)$  是一个滤波器,  $n_t$  是与之不相关的噪声。相关概念的推广是“相干”概念, 定义为

$$C = \frac{E\left[X\left(\frac{1}{Z}\right)Y(Z)\right]}{[E(\bar{X}X)E(\bar{Y}Y)]^{1/2}}$$

相关是实数标量, 而相干是复数标量, 表示相关的频率之间的依赖关系。对相干作估计, 实质上是要模拟总体平均。如果忽略总体平均, 相干 (其平方) 为

$$|C|^2 = \overline{C}C = \frac{\overline{(\bar{X}Y)(\bar{X}Y)}}{(\bar{X}X)(\bar{Y}Y)} = +1$$

这说明相干的平方与数据无关, 总为 +1。我们发现, 由于相关是从零向两边散离, 相干的平方则是自零向一边偏离。

#### 4-4 时间、频率与统计分辨率

许多时间函数从靠近的两个采样点来看并不是完全随机的, 但从比较长的时间来看, 随机性就大了。表示这一概念的通用数学模型是建立一个所谓的“平稳时间序列”。如图4-4所示, 通过滤波器输入一些随机数  $x_t$ , 由输出即可得到。



图 4-4

生成随机时间序列的模型

$x_t$  可以是独立的随机数或白噪。〔这两个术语实际上差不多是一回事, 独立的概念较强, 当  $t \neq s$  时,  $x_t$  与  $x_s$  无任何关系; 而白噪表示, 当  $t \neq s$  时,  $E(x_t x_s) = 0$ 〕。如果  $f_t$  是一

个低通滤波器时，输出的随机时间序列  $y_t$  可以相当慢地逐步变化。当我们模拟连续时间函数时，就可以这样做。当滤波器和输入的随机数的性质 ( $m$  与  $\sigma^2$ ) 都随时间而变化时，那么其输出的随机时间序列可称为平稳随机时间序列。平稳性的假定是经常采用的，即使实际情况不完全符合时，也接受这种假定。对于由已知的  $y_t$  的过去值，预测  $y_t$  的将来值的问题，是有用的。现在我们用这个模型，在给定  $y$  的  $n$  个采样点条件下，研究  $y_t$  的谱估计问题。对于  $y_t$  的谱，有很确切的含义。我们有

$$Y(Z) = F(Z)X(Z) \quad (4-4-1)$$

及其共轭

$$\bar{Y}\left(\frac{1}{Z}\right) = \bar{F}\left(\frac{1}{Z}\right)\bar{X}\left(\frac{1}{Z}\right) \quad (4-4-2)$$

(4-4-2) 乘以 (4-4-1) 得

$$\bar{Y}\left(\frac{1}{Z}\right)Y(Z) = \bar{X}\left(\frac{1}{Z}\right)X(Z)\bar{F}\left(\frac{1}{Z}\right)F(Z) \quad (4-4-3)$$

但是，在前一节，我们学过  $E(\bar{X}X) = \sigma^2$ ，可令  $\sigma^2$  等于 1，则输出  $\bar{Y}$  的功率谱就是滤波器  $F$  的能谱，总的描述见图 4-5。主要问题是，根据  $y_t$  的几个点的采样怎样估计  $y_t$  的谱的问题。我们介绍三种不同的计算方法。它们所要求的基本限定是一致的。

第一种方法，采用如图 4-6 (译注：漏孔积分器见 2-5 节练习 1 及 4-2 节练习 2) 所示的一组滤波器。随机数输入窄带滤波器，其输出有点象正弦波。但一个重要的区别在于，正弦波的振幅值周期性地重复，而窄带滤波器输出的振幅在一定控制范围内摆动，见图 4-7。滤波器带宽较窄时，输出

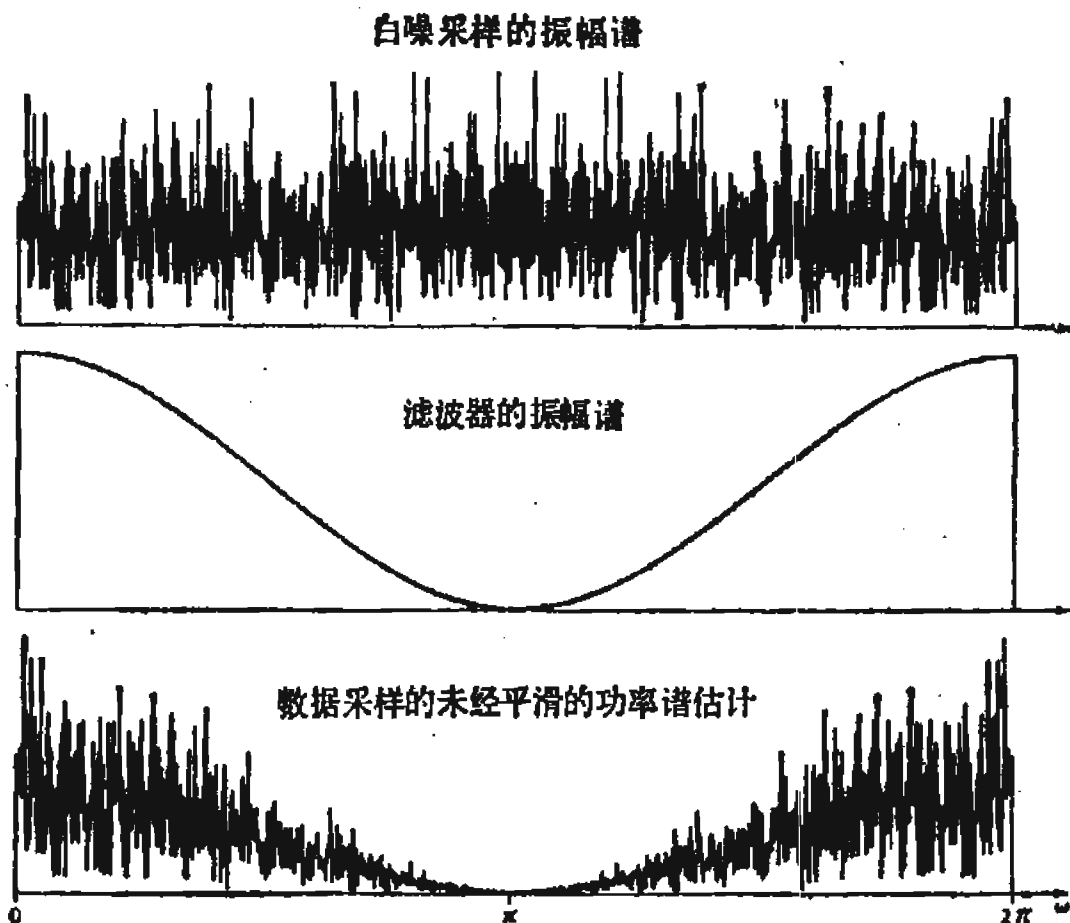


图 4-5  
谱估计

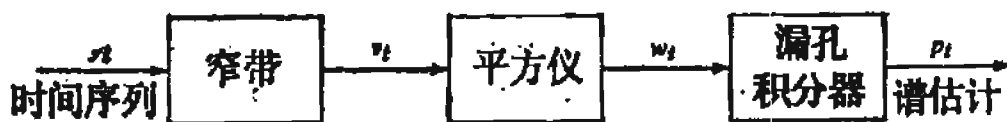


图 4-6  
随机序列的谱估计

振幅变化缓慢。当滤波器的脉冲响应有持续时间  $\Delta t_{\text{滤波器}}$  时，那么在  $t$  时刻的输出振幅值与在  $t + \Delta t_{\text{滤波器}}$  时刻的输出振幅概率相关。

于是，作统计平均时，不是按时间点的个数平均，而是按时间区间  $\Delta t_{\text{滤波器}}$  的个数平均，这样增强了平均的可靠性。因此，积分器的衰减时间  $\Delta t_{\text{积分器}}$  一般都选得比  $\Delta t_{\text{滤波器}} = 1/\Delta f$

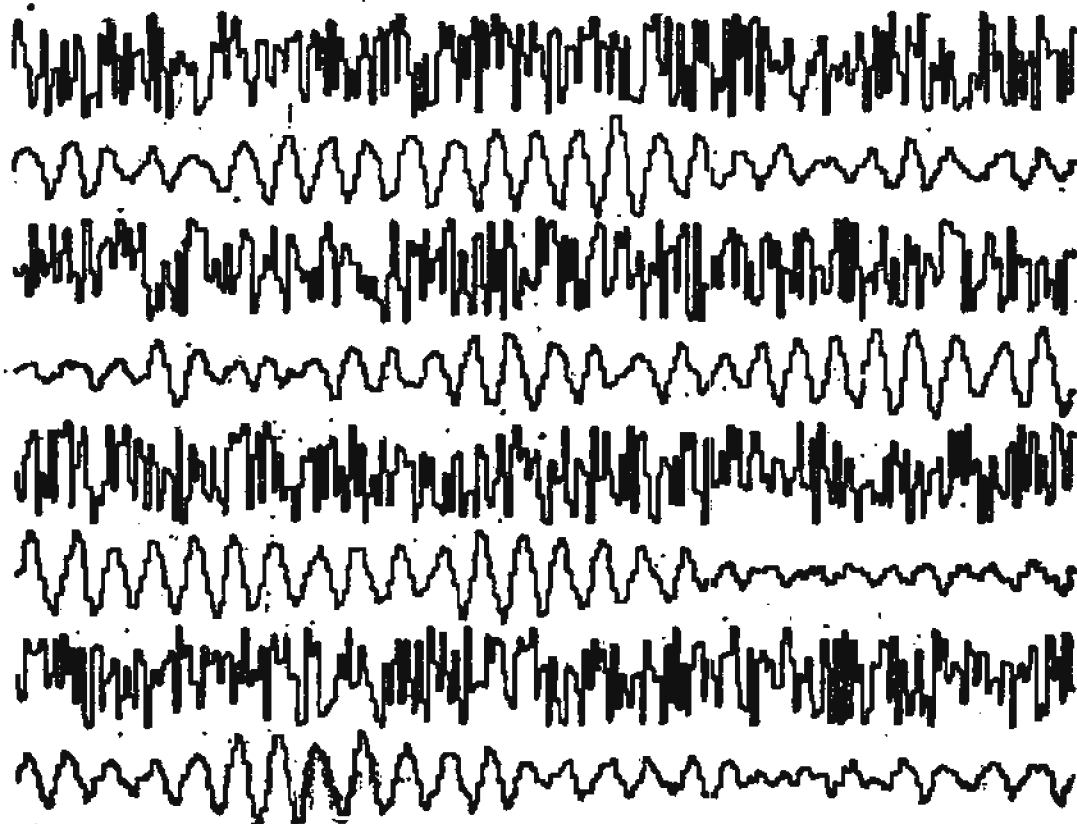


图 4-7

1024个随机数在窄带滤波前的显示和通过窄带滤波后的输出。滤波器为  $(1-Z)/[(1-Z/Z_0)(1-Z/\bar{Z}_0)]$ , 其中  $Z_0=1.02e^{i\pi/5}$ 。

来得大。当  $\Delta t_{\text{积分器}}$  递增时, 输出  $p$  的改变量  $\Delta p$  下降。由于  $v_t$  在大约  $\Delta t_{\text{滤波器}}=1/\Delta f$  的时间跨度上具有独立的值, 故进行平滑的自由度可写成  $\Delta t_{\text{积分器}}/\Delta t_{\text{滤波器}}=\Delta f \Delta t_{\text{积分器}}$ 。改变量  $\Delta p/p$  与自由度倒数的平方根成比例, 所以得

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 = \frac{1}{\Delta f \Delta t_{\text{积分器}}}$$

或, 由此推出一个有用的不等式

$$\Delta t \Delta f \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 > 1 \quad (4-4-4)$$

不等式 (4-4-4) 表示了估计随机函数的功率谱时遇到的三

个基本参数的测不准关系。根据长度为  $n$  的采样来估计  $y_t$  的谱的其它两种方法，与 4-3 节所述的估计白噪声的谱的方法完全相同。事实上，(4-4-4) 表示的结果同 (4-3-9) 是一致的。

通常的解释是：要想达到  $\Delta f$  的频率分辨率和  $\Delta p/p$  的相对精度，时间采样持续至少要使得  $\Delta t \geq 1/[\Delta f(\Delta p/p)^2]$ 。虽然这样解释在一般情况下是正确的，但是对于在短时间内所记录到的高谱共振序列就不适用了。这时，数据采集在距离两端很大一段距离上是可以预测的。所以有效的  $\Delta t$  要比采样长度略大一点（也许是大很多）。

### 练习

1. 通常都使数据采集的两端渐渐压低，以便在其两端数据平滑地趋于 0。试选择一个权函数并以半定量方式讨论它对  $\Delta t$ ,  $\Delta f(\Delta p/p)^2$  的影响。

2. 在练习 1 中把压低数据采集的两端改为压低相关函数的两端。解答练习 1 提出的问题。

## 4-5 中心极限定理

在概率与统计理论中，中心极限定理也许是最重要的一个定理。中心极限定理的导出，说明了为什么高斯概率函数在自然界中如此频繁地遇到，不但在物理学中而且在生物学与社会科学中也常常遇到。任何一个有经验的科学工作者都知道这个定理的基本思想。虽然其结论很深奥，且至今还是一个活跃的研究课题，但是我们很容易弄清楚其基本概念。

从一个已知概率函数获得随机整数，有一种办法是在纸片上写上一些整数，并把纸片放进一顶帽子里。每次抽出一张纸片。抽出的纸片看完后，再放回帽子里。这样，抽到整

数  $i$  的概率为写有  $i$  的纸片的张数与帽子里纸片总数相除得到的比率  $a_i$ 。显然，对  $a_i$  按所有  $i$  求和，必等于 1。得到随机整数的另一种方法是掷骰子。除了  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = \frac{1}{6}$  之外，其它的  $a_i$  都等于零。第一次抽到整数  $i$  且第二次抽到整数  $j$  的概率为  $a_i a_j$ 。同时抽取两张纸片或掷一对骰子，那么  $i$  与  $j$  的和等于  $k$  的概率显然为

$$c_k = \sum_i a_i a_{k-i} \quad (4-5-1)$$

由于这个等式中是求褶积，我们可以用  $Z$  变换来表示，记

$$A(Z) = \cdots a_{-1} Z^{-1} + a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \cdots \quad (4-5-2)$$

那么， $i$  加  $j$  等于  $k$  的概率即

$$C(Z) = A(Z) A(Z) \text{ 中 } Z^k \text{ 的系数} \quad (4-5-3)$$

显然，如果我们将  $n$  个随机数相加，其和等于  $k$  的概率为

$$G(Z) = [A(Z)]^n \quad (4-5-4)$$

中  $Z^k$  的系数。概率的中心极限定理论定：当  $n$  趋于无穷时，多项式  $G(Z)$  趋于一种特殊形式，而与多项式  $A(Z)$  的特性无关。这个特殊形式是： $G(Z)$  的系数图变得越来越与钟形高斯函数的包络相接近。为什么会发生这种情况呢？因为我们的讨论缺乏数学上的严密性，该定理在有些条件下并不成立。有些病态的  $A$  函数得到的  $G$  并不趋于高斯函数。尽管某些病态函数有时在应用时也会出现，但在这里我们不想过多地研究它。

讨论  $A(Z)$  在  $\omega$  为实数时的值。当  $\omega = 0$ ， $A(Z)$  的各项的和可以在复平面上绘出矢量  $a_k e^{i\omega k}$ （都指向正实方向）的和，以直观地表示出来。当  $\omega \neq 0$ ，矢量各有不同方向。见图 4-8 所示。

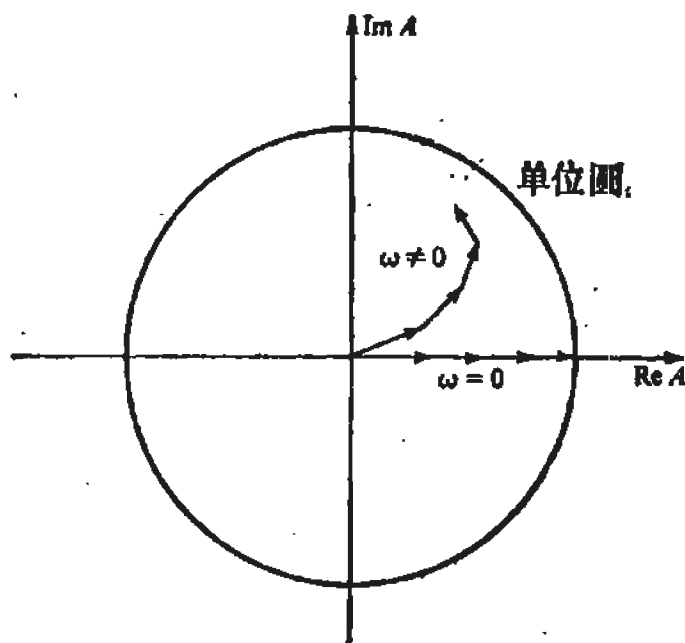


图 4-8

复数  $a_k e^{i\omega k}$  加在一起

取  $A(e^{i\omega})$  的  $n$  次幂，与其最大值对应的  $\omega$  的值肯定在  $\omega = 0$ （在  $A$  取最大值的地点）附近，因为在  $A$  取值小的任何区域， $A^n$  小得更厉害。在  $\omega = 0$  或  $Z = 1$  附近，我们就可以把  $A(Z)$  展成  $\omega$  的幂级数。即

$$A(e^{i\omega}) = A \Big|_0 + \frac{\partial}{\partial \omega} A \Big|_0 \omega + \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} A \Big|_0 \frac{\omega^2}{2!} + \dots \quad (4-5-5)$$

注意，此幂级数的系数与概率函数的矩  $m_k$  成比例。即

$$A(e^{i\omega}) = \sum_k a_k e^{ik\omega} \quad (4-5-6)$$

$$A(1) = \sum_k a_k = m_0 = 1 \quad (4-5-7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} A = \sum_k i k a_k e^{ik\omega} \quad (4-5-8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} A \Big|_0 = \sum_k i k a_k = i m_1 \quad (4-5-9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} A \Big|_0 = - \sum_k k^2 a_k = - m_2 \quad (4-5-10)$$

当  $A(Z)$  提升到  $n$  次幂时，我们可以推测，在此幂级数展开中只有前三项是主要的（显然，当概率函数的所有矩都是无穷时，这种设想是不对的）这样，我们认为就  $A$  对  $G (G = [A]^n)$  的影响而论，最为重要的是均值  $m = m_1$  及二阶矩  $m_2$ 。如实际果真如此，我们就可以用与  $A$  同均值和同二阶矩的任何函数  $B$  来替代  $A$ 。可借用我们所能找到的一个最简单函数。选用所谓的二项概率函数就很理想

$$B = \frac{Z^m (Z^\sigma + Z^{-\sigma})}{2} \quad (4-5-11)$$

$$= \frac{e^{i(m+\sigma)\omega} + e^{i(m-\sigma)\omega}}{2} \quad (4-5-12)$$

可以验证它的一阶矩

$$\frac{\partial B}{\partial \omega} = \frac{i[(m+\sigma)e^{i(m+\sigma)\omega} + (m-\sigma)e^{i(m-\sigma)\omega}]}{2} \quad (4-5-13)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \omega} \Big|_0 = i m \quad (4-5-14)$$

二阶矩

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \omega^2} \Big|_0 = - \frac{(m+\sigma)^2 + (m-\sigma)^2}{2} \quad (4-5-15)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \omega^2} \Big|_0 = - (m^2 + \sigma^2) \quad (4-5-16)$$



因此，应选择  $\sigma$ ，使得下式成立

$$m_2 = m^2 + \sigma^2 \quad (4-5-17)$$

当然，我们不能要求  $m$  和  $\sigma$  一定是整数。因此，(4-5-11) 不一定是通常意义下的  $Z$  变换。这也无关大局；我们只需对 (4-5-11) 作如下解释就可以了

1. 抽到数为  $m + \sigma$  的概率是二分之一。
2. 抽到  $m - \sigma$  的概率是二分之一。
3. 抽到任何其它数的概率为 0。

现在求  $(Z^\sigma + Z^{-\sigma})$  的  $n$  次幂，得一  $Z^\sigma$  的幂级数，其系数是按  $Z$  的零次幂对称地分布的，且系数大小是按二项式系数求出的。 $B(Z)^n$  系数的略图见图 4-9。

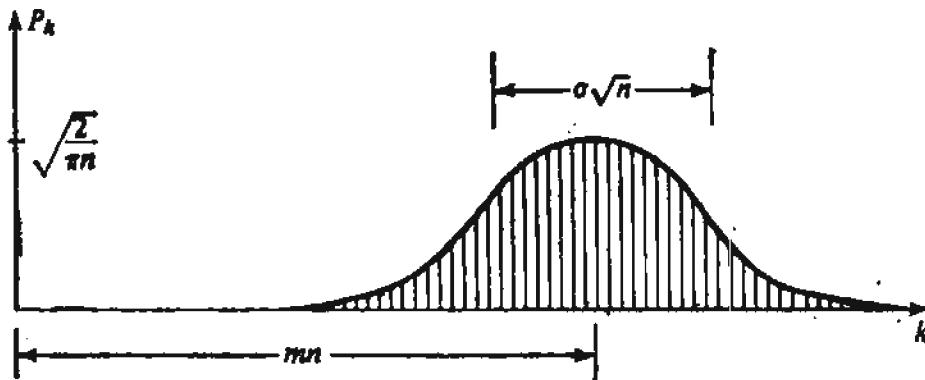


图 4-9

$(Z^m(Z^\sigma + Z^{-\sigma})/2)^n$  的系数

现在可看出，当  $n$  很大时，此二项式系数逐渐逼近高斯函数。逼近这个极限有一个小小的技巧。显然， $n$  个随机整数的和如  $\sqrt{n}$  一样是发散的。类似地， $(\frac{1}{2} + Z/2)^n$  中  $Z$  的各次幂的系数单个来看都比较小，而系数的个数却比较大。在时间序列分析中，曾用过代换  $Z = e^{i\omega \Delta t}$ ，通常取  $\Delta t = 1$ ，其含义是数据点都落在时间轴的整数点上。当前把  $Z$  变换应用

到概率理论中，选择  $\Delta t = 1$  还由于原先说过随机地抽取纸片得到的数都是整数。把  $n$  个随机数加在一起，那么，这些整数都换算成被  $\sqrt{n}$  除了的整数是讲得通的。从而我们可作替换： $Z = e^{i\omega \Delta t} = e^{i\omega/\sqrt{n}}$ 。现在  $Z^k$  的系数就是抽到数  $k/\sqrt{n}$  的概率了。求  $(Z^\sigma + Z^{-\sigma})/2$  的  $n$  次幂，得到  $n$  次独立抽取和数的概率分布为

$$\begin{aligned} [B(Z)]^n &= \left( \frac{Z^\sigma + Z^{-\sigma}}{2} \right)^n \\ &= \left( \cos \frac{\sigma\omega}{\sqrt{n}} \right)^n \end{aligned}$$

取余弦的级数展开的第一项。得

$$[B(Z)]^n \approx \left( 1 - \frac{\sigma^2\omega^2}{2n} \right)^n$$

利用一个熟知的事实  $(1 + x/n)^n \rightarrow e^x$ 。当  $n$  很大时得

$$[B(Z)]^n \approx e^{-\sigma^2\omega^2/2} \quad (4-5-18)$$

于是，求和中得到的数是  $t$  的概率并需通过 (4-5-18) 的逆付里叶变换求得。高斯函数 (4-5-18) 的付里叶变换可以在积分表中找到。查得是高斯函数

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2}$$

#### 4-6 置信区间

通常要求对随机误差的大小与影响作出某种估计。而把这种估计转换成另一命题的形式往往是很重要的，如转换成

$$m = \hat{m} \pm \sigma/\sqrt{n}$$

有些情况下，要求确定真均值落在所给定区间内的概率，即求  $m$  落在区间。

$$\hat{m} - \Delta m < m < \hat{m} + \Delta m$$

内的置信度是多少。在求此概率之前，需要先对控制随机误差的概率函数作某些假定。关于误差是相互独立的假定可能被认为是最危险的事。当误差并不独立时（这是常有的事），可以重新调整  $n$  的数值，使之成为某些个独立误差的估计量。在时间序列分析中曾经这样做过，我们把  $n$  不看作是时间序列上点的个数，而看作是长度为  $\Delta t$  滤波器的区间的个数。置信区间的另一个被认为是危险的事，是在信息不够充分的情况下，我们往往根据中心极限定理，假定误差遵从高斯概率函数。如果事实上数据误差包含了人为的错误或瞬时的电子设备故障所造成的错误，那么高斯函数的假定就很危险，在地球物理解释中可能造成一系列错误。解决这类问题可借助于非参数统计<sup>[18]</sup>。

首先，把原先提出的有关均值的问题归结为有关中位数的问题是有好处的。中位数的定义是总体的中间值，总体中有一半大于它，另一半小于它。在许多（即使不是绝大多数）情况下，应用中位数较为简便，实际上可替代算术平均值。事实上，当概率密度为对称函数时，中位数同均值相等。对于一个数据点，中位数无法确定，而由于疏忽还可能误认为是无穷大。对于  $n$  个数的采样 ( $x_i, i=1, 2, \dots, n$ ) 可把这串数从小到大重新排列一下，选其中间值作为中位数  $m_1$  的估计量  $\hat{m}_1$ 。特别是把重排后的  $x_i$  记为  $x'_i, x'_i \leq x'_{i+1}$ 。于是，有  $\hat{m}_1 = x'_{n/2}$ 。现在，在不清楚随机变量  $x_1$  的概率密度函数的情况下，我们仍能计算中位数  $m_1$  在区间

$$x'_{n/2} - \alpha\sqrt{n} < m_1 < x'_{n/2} + \alpha\sqrt{n} \quad (4-6-1)$$

内的概率。例如，设  $a=1$ ， $N=100$ ，计算中位数  $m_1$  位于数据总个数的40%和60%之间的概率。计算方法是这样的：定义一个新随机变量

$$y = \text{step}(x - m_1) \quad (4-6-2)$$

这个阶梯 (step) 函数，当  $x > m_1$ ，等于 +1；当  $x < m_1$  时，等于 0。新随机变量  $y$  以相同的概率只取 +1 和 0 两个值。这样，即使不知道随机变量  $x$  的概率函数，也可以知道  $y$  的概率函数。现来定义第三个随机变量  $s$

$$s = \sum_{i=1}^n y_i$$

由于每个  $y_i$  为 1 或 0，故  $s$  必须是 0 与  $n$  之间的一个整数。进一步说， $s$  取  $j$  值的概率是由  $(\frac{1}{2} + Z/2)^n$  中  $Z^j$  的系数给出的。现在可知， $s$  位于区间  $n/2 - \alpha\sqrt{n} < s < n/2 + \alpha\sqrt{n}$  的概率，把所需要的  $Z^j$  的系数加起来就可得到。而这个概率按定义就等于中位数  $m_1$  位于区间 (4-6-1) 的概率。对于  $a=1$  和较大的  $n$ ，这个概率可达到95%。

## 第5章 矩阵与多道时间序列

矩阵知识对于建立物理与社会科学方面的计算模型都是必不可少的。但矩阵这个课题很大，并且已有许多深浅不同的出色文章作过论述，这里我们只作简要的叙述。我们仅列出后面几章中要用到的矩阵的主要性质，而略去了证明。虽然我们提出的一些建议在大多数情况下是适用的，但偶而也会遇到一些矩阵(我们称其为病态矩阵)，应用我们提出的办法时就可能不行了。实践中，人们总是想获得并检验计算的结果。但实际工作中出现所谓病态的情况要比预期的多得多。当矩阵计算出现困难时，一般都首先想到要去采用精度更高的算法。根据作者的经验和具有明确物理意义的计算，很少有要求高精度的。当想改用高精度算法时，往往是因为物理上有某种考虑不周的地方，使得正在求解问题在提法上就存在缺陷。如果对问题作少许改动而不致使答案有很大变动，则应试用别的方法组织计算，有可能避免要求更高精度的计算。无论如何，我们应集中讨论非病态情况，但读者要有思想准备：在实际工作中肯定会遇到病态情况，那时就要靠读者运用自己的数学知识和物理见解灵活地加以处理。

### 5-1 矩 阵 提 要

一组联立方程可写作

$$Ax = b \quad (5-1-1a)$$

其中  $A$  为方阵(在第六章讲到“最小二乘法”时将涉及非方

阵), 并且  $x$  与  $b$  为列向量。对于  $2 \times 2$  的情况, (5-1-1a) 变为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \quad (5-1-1b)$$

方程(5-1-1b)有一个简单的几何解释。矩阵的两列和  $b$  可看作是平面上的向量。方程(5-1-1b)表明,  $x_1$  乘以第一个列向量加上  $x_2$  乘以第二个列向量等于列向量  $b$ 。当矩阵的两列向量同方向时, 求解就会遇到困难。除非  $b$  也正好与它们同方向, 否则不可能有解  $x_1$  与  $x_2$ 。这同样适用于一般情况。如果  $b$  属于由  $A$  的各列张成的空间, 则方程(5-1-1a)的解  $x$  存在。在最常见的实际情况中, 矩阵  $A$  与列向量  $b$  是根据各自独立的考虑而提出的, 所以要求  $A$  的各列张成的空间含有任意向量  $b$  常常是合理的。如果  $A$  为一  $n \times n$  矩阵, 那么就要求其列组成一  $n$  维空间。特别以  $A$  的列为边组成的  $n$  维平行六面体的体积不应为零。这样的体积是由  $A$  的行列式给出的。

另一种在实际中更多出现的联立方程组, 即所谓的齐次方程

$$Ax = 0 \quad (5-1-2)$$

它总有  $x = 0$  的解, 常称为零解。为使(5-1-2)中  $x$  具有非零解,  $A$  的行列式应等于零, 意味着  $A$  的各列不应张成一  $n$  维空间。以后我们将再回过头来讨论联立方程组具体求解的问题。

矩阵最有用的一个特点是, 其元素不仅可以是数, 而且还可以是别的矩阵。从另一方面看, 一个大的矩阵又可以分

块，划分为几个较小的矩阵。值得注意的是，两个矩阵，不论它们是否作过分块，它们的乘积总是不变的。请看等式

$$\left[ \begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} g & h \\ \hline i & j \\ k & l \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ d & e \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} g & h \\ \hline i & j \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} c \\ f \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} k & l \end{array} \right] \quad (5-1-3)$$

采用求和记号，(5-1-3)左边矩阵的元素是

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^3 A_{ij} B_{jk} \quad (5-1-4)$$

而右边是

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^2 A_{ij} B_{jk} + \sum_{j=3}^3 A_{ij} B_{jk} \quad (5-1-5)$$

很明显，等式(5-1-4)与(5-1-5)相同；这说明，一个矩阵乘积的分块只不过是把它项重新划分了一下。从数学观点看，分块实际上并不起任何作用，但从计算或方便讨论上看，却是十分重要的。

我们现在利用矩阵分块导出求矩阵的逆的镶边法。镶边法不是最快速或最精确的方法，但它很简单，甚至对于非对称的复数矩阵也是如此。另外，这个方法还给出了每一步骤中矩阵的行列式的表示，且适用于齐次方程。

镶边法按递推方式进行。即从已知的 $k \times k$ 矩阵的逆，去求一个 $(k+1)(k+1)$ 矩阵的逆，后者是在原来的 $k \times k$ 矩阵基础上从边上添加一行和一列组成的。特别是如在(5-1-6)中 $A, e, f, g$ 和 $A^{-1}$ 为已知，问题是要求出 $W, x, y$ 和 $z$ ，符合

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & f \\ \hline e & g \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} W & y \\ \hline x & z \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \quad (5-1-6)$$

首先将 (5-1-6) 中两个分块矩阵相乘。我们得乘积的第一列为

$$AW + fx = l \quad (5-1-7)$$

$$eW + gx = 0 \quad (5-1-8)$$

选定  $W$  为

$$W = A^{-1}(l - fx) \quad (5-1-9)$$

此  $W$  显然满足 (5-1-7)。  $x$  仍为未知, 可将 (5-1-9) 代入 (5-1-8) 求出

$$x = \frac{eA^{-1}l}{eA^{-1}f - g} \quad (5-1-10)$$

现在为了求出含  $y$ 、 $z$  的列, 我们计算 (5-1-6) 乘积中的第二列

$$Ay + fz = 0 \quad (5-1-11)$$

$$ey + gz = 1 \quad (5-1-12)$$

用  $A^{-1}$  乘 (5-1-11)

$$y = -A^{-1}fz \quad (5-1-13)$$

按此式可计算列向量  $y$ , 只剩下标量  $z$  待定。为了求出此标量因子, 将 (5-1-13) 代入 (5-1-12) 得

$$-eA^{-1}fz + gz = 1$$

$$z = \frac{1}{g - eA^{-1}f} \quad (5-1-14)$$

可以证明, 于某一步骤中求逆的那个矩阵的行列式是以前各次镶边步骤中得到的 (5-1-14) 中的分母的连乘积。因此在递推过程中, 当 (5-1-14) 的分母为零, 便知矩阵是奇异的, 计算就不能继续进行了。

把上述递推步骤总结如下: 从一个矩阵的左上角元素开



始，此元素为标量，其逆即它的倒数。然后如(5-1-6)所示，往边上添加一行和一列，并求出此 $2 \times 2$ 矩阵的逆。这种镶边并求逆的过程可根据需要一直继续下去。每一步骤中，一般首先由(5-1-14)算出 $z$ ，然后由下式算出高一阶的 $A^{-1}$

$$A^{-1} \leftarrow \begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & \frac{1}{z} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} A^{-1} & f \\ & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} eA^{-1} & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad (5-1-15)$$

(5-1-15)是(5-1-9)、(5-1-10)和(5-1-13)的概括。图5-1是按此公式求矩阵的逆的一个 Fortran 子程序。

```

SUBROUTINE CMAINE(N,B,A)
C   A=MATRIX INVERSE OF B
COMPLEX B,A,C,R,DEL
DIMENSION A(N,N),B(N,N),R(100),C(100)
DO 10 I=1,N
DO 10 J=1,N
10  A(I,J)=0.
DO 40 L=1,N
DEL=B(L,L)
DO 30 I=1,L
C(I)=0.
R(I)=0.
DO 20 J=1,L
C(I)=C(I)+A(I,J)*B(J,L)
20  R(I)=R(I)+B(L,J)*A(J,I)
30  DEL=DEL-B(L,I)*C(I)
C(L)=-1.
R(L)=-1.
DO 40 I=1,L
C(I)=C(I)/DEL
DO 40 J=1,L
40  A(I,J)=A(I,J)+C(I)*R(J)
RETURN
END

```

图 5-1

用镶边法求矩阵的逆的 Fortran 子程序

如果 $A$ 的行列式某步变为奇异的，求 $A^{-1}$ 将怎么对待呢？ $A$ 的行列式变为奇异的，意味着(5-1-6)中的矩阵元素 $g$ 越来越接近于 $eA^{-1}f$ ，从(5-1-14)知 $z$ 趋近于无穷大。有意思的是：(5-1-15)中的第二项比第一项更起决定性的作用，并

且左边的逆(矩阵)趋近于无穷大乘以一个列向量(记为  $c$ ) 与一个行向量(记为  $r$ )的乘积。

当  $z^{-1}$  趋于零时, 通常的表达式  $AA^{-1}=I$  或  $A^{-1}A=I$  可化为

$$Acr = z^{-1}I \quad (5-1-16)$$

$$\text{或 } crA = z^{-1}I \quad (5-1-17)$$

一般情况( $A$  的秩等于  $n-1$ , 不是小于  $n-1$ )下, 其中  $c$  和  $r$  不会同时为零, 当  $z^{-1}$  趋于零时, (5-1-16)及(5-1-17)变为

$$Ac = 0 \quad (5-1-18)$$

$$rA = 0 \quad (5-1-19)$$

总之, 为了求得象 (5-1-1) 那样的联立方程组的解, 可以用镶边法计算出  $A$  的逆, 然后用  $A^{-1}$  去乘(5-1-1), 得

$$X = A^{-1}b \quad (5-1-20)$$

当  $b$  为零向量时, 便是解齐次方程组。我们希望  $z$  仅在最后一步镶边中才算不出来(如果早就出了问题, 应当另作处理), 其解由(5-1-18)中的列向量  $c$  给出。

引入行齐次方程组(5-1-19), 是因为这样的方程组在求一非对称矩阵的行特征向量时会遇到。下一节中, 我们将更为详细地讨论特征向量的性质。矩阵  $A$  的列特征向量  $c$  由下式的解所定义

$$Ac = \lambda c \quad (5-1-21)$$

$\lambda$  称为特征值。与此同时, 自然提出行特征向量方程

$$rA = \lambda r \quad (5-1-22)$$

为了求得(5-1-21)或(5-1-22)的解, 必须令行列式  $\det(A - \lambda I) = 0$ 。求出(关于  $\lambda$  的)多项式  $\det(A - \lambda I)$  的根  $\lambda_j$  之后, 可以对每个  $\lambda_j$  构成新的矩阵  $A'$

$$A' = A - \lambda_j I \quad (5-1-23)$$

于是可从镶边算法的最后一步中出现的列向量  $\mathbf{c}$  得出

$$\mathbf{A}'\mathbf{X} = 0 \quad (5-1-24)$$

的解；即得到列特征向量。类似地，行特征向量是镶边算法中最后一步中出现的行向量。

### 练习

1. 指出(5-1-7)至(5-1-14)中所有矩阵的阶数。
2. 说明如何从(5-1-9)、(5-1-10)、(5-1-13)和(5-1-14)得出(5-1-15)。

## 5-2 矩阵的函数

西勒维斯脱 (SYLVESTER) 定理提供了对矩阵函数的快速算法。常见的简单矩阵函数有  $\mathbf{A}^{-1}$  和  $\mathbf{A}^N$  ( $N$  较大)。另两个矩阵函数  $e^{\mathbf{A}}$  和  $\mathbf{A}^{1/2}$  在波的传播理论中占有重要地位。在叙述西勒维斯脱定理和它的证明之前，我们先举一个数字的实例。给定矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-2-1)$$

要求它的列特征向量和特征值；这可由下面两式给出

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-2-2)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-2-3)$$

由于矩阵  $\mathbf{A}$  不是对称的，其行特征向量与列特征向量不同，行特征向量由下列两式给出

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5-2-4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (5-2-5)$$

我们可以把(5-2-2)至(5-2-5)简记为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{c}_1 &= \lambda_1\mathbf{c}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{c}_2 &= \lambda_2\mathbf{c}_2 \\ \mathbf{r}_1\mathbf{A} &= \lambda_1\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2\mathbf{A} &= \lambda_2\mathbf{r}_2 \end{aligned} \quad (5-2-6)$$

读者会发现：给  $\mathbf{r}$  或  $\mathbf{c}$  乘上任意一个标量因子 (5-2-6) 仍然成立。如果选定的标量因子能使  $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = 1$  和  $\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_2 = 1$ ，则称特征向量已被规格化了。还将看到， $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = 0$  和  $\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_1 = 0$ ，我们将在练习中建立其一般性结果。

下面考虑矩阵  $\mathbf{c}_1\mathbf{r}_1$  的特性

$$\mathbf{c}_1\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

此矩阵的任何次幂皆等于该矩阵本身，以其平方为例

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

这种性质称为幂等性。这是由于  $(\mathbf{c}_1\mathbf{r}_1)(\mathbf{c}_1\mathbf{r}_1) = \mathbf{c}_1(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_1)\mathbf{r}_1 = \mathbf{c}_1\mathbf{r}_1$  的缘故。显然， $\mathbf{c}_2\mathbf{r}_2$  也具有同样的性质。还请注意，矩阵  $\mathbf{c}_1\mathbf{r}_1$  “垂直”于矩阵  $\mathbf{c}_2\mathbf{r}_2$ ，即

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

正是由于  $\mathbf{r}_2$  与  $\mathbf{c}_1$  及  $\mathbf{r}_1$  与  $\mathbf{c}_2$  是垂直的。

西勒维斯脱定理指出，矩阵  $\mathbf{A}$  的任何函数  $f$  可以写成

$$f(\mathbf{A}) = f(\lambda_1)\mathbf{c}_1\mathbf{r}_1 + f(\lambda_2)\mathbf{c}_2\mathbf{r}_2$$

最简单的例子是  $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \lambda_1 \mathbf{C}_1 \mathbf{F}_1 + \lambda_2 \mathbf{C}_2 \mathbf{F}_2 \\ &= 1 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-2-7)$$

另一例是

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= 1^2 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 2^2 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\mathbf{A}$  的逆为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= 1^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 2^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

单位矩阵也可以用矩阵  $\mathbf{A}$  的特征向量展开。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^0 = \mathbf{I} = 1^0 &= 1^0 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 2^0 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

在列举一些更为复杂的矩阵函数之前，我们先看看西勒维斯脱定理大致是怎样求证的。我们用到在所有关于矩阵理论的书中都讲到的一个基本结果，即绝大多数矩阵(见练习)都可

以化为对角阵。以我们举过的 $2 \times 2$ 的矩阵为例，其对角阵形式为

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} c_1 & | & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (5-2-8)$$

其中

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & | & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-2-9)$$

由于矩阵可以与其逆矩阵交换，故从(5-2-9)又得

$$\begin{bmatrix} c_1 & | & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-2-10)$$

(5-2-8)右乘以行特征向量矩阵、左乘上列特征向量矩阵，利用(5-2-10)，得

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & | & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad (5-2-11)$$

等式(5-2-11)与(5-2-7)是一回事，把(5-2-11)写成下列形式就可以看出

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} c_1 & | & c_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & | & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & | & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 c_1 r_1 + \lambda_2 c_2 r_2 \end{aligned}$$

现为了求出 $A^2$ ，有

$$A^2 = (\lambda_1 c_1 r_1 + \lambda_2 c_2 r_2) (\lambda_1 c_1 r_1 + \lambda_2 c_2 r_2)$$

应用 $c_1 r_1$ 与 $c_2 r_2$ 的正交性，此式简化为

$$A^2 = \lambda_1^2 c_1 r_1 + \lambda_2^2 c_2 r_2$$

这里清楚地表明：对于  $f(A)$  是  $A$  的多项式的情形，可以利用(5-2-11)证明西勒维斯脱定理。显然，这种证明方法并不限于  $2 \times 2$  矩阵，它对于  $n \times n$  矩阵也是适用的。类似地，可以考虑  $A$  的幂级数。由于几乎任何函数都可展开为幂级数，所以我们可以考虑象正弦、余弦、指数等超越函数。

在解微分方程时，自然地会出现指数函数。考虑矩阵微分方程

$$\frac{d}{dx} \mathbf{E} = \mathbf{A} \mathbf{E} \quad (5-2-12)$$

容易验证，它有幂级数解

$$\mathbf{E} = \mathbf{I} + \mathbf{A}x + \frac{\mathbf{A}^2 x^2}{2!} + \dots$$

这是指数函数的幂级数定义。若矩阵  $A$  能被化为对角阵，则按西勒维斯脱定理可以有更为简单的表达式。对于已考虑过的数字矩阵的例子，我们有

$$\mathbf{E} = e^x \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + e^{2x} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

该指数矩阵是微分方程式(5-2-12)的一个解，不论其边界条件如何。物理学中常见到下面这种微分方程

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (5-2-13)$$

带上两个关于  $y_1$ 、 $y_2$  或它们组合的边界条件。可以验证

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}x} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

是(5-2-13)的解，式中  $k_1$  与  $k_2$  为任意常数。用边界条件定

出  $k_1$  与  $k_2$  的值。 $k_1$ 、 $k_2$  恰好等于  $y_1(x=0)$  和  $y_2(x=0)$ 。

矩阵的平方根是个有趣的情况。一个象前面 A 那样的  $2 \times 2$  矩阵将有四个平方根，因为对  $\sqrt{\lambda_1}$  与  $\sqrt{\lambda_2}$  取正号或负号有四种可能的搭配。一般说来， $n \times n$  矩阵有  $2^n$  个平方根。下一章中，在处理微分算子  $(k^2 + \partial^2/\partial x^2)^{1/2}$  时，将看到它的重要应用。讲到算子的平方根的书不多，知道其含义的人也不多。说明微分算子平方根的最好办法是将它与矩阵 M 的平方根联系起来看，M 为

$$M = k^2 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} ? & ? & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & ? & ? \end{pmatrix}$$

右边的矩阵是二阶偏微商的二阶差分近似。我们把上式记为

$$M = k^2 I + T$$

显然我们想取得 M 的阶很大，以使其上下两端数据影响最小。想象中，M 的阶数想取多大就可以多大，对于任一阶数（译注：阶数记为 M）都可以得到  $2^M$  个平方根。但在使用中，M 的平方根只有两个有意义，一个是由特征值的带正号的平方根组成的，另一个是由带负号的平方根组成的。我们怎样求这些“主值”平方根呢？在我们所研究的情况中，可以应用二项式定理，即

$$\begin{aligned} (k^2 I + T)^{1/2} &= \pm k \left( 1 + \frac{T}{k^2} \right)^{1/2} \\ &= \pm k \left( 1 + \frac{T}{2k^2} - \frac{T^2}{8k^4} + \dots \right) \end{aligned}$$

只要将所假定的平方根平方后，就可以看出上述结果是正确



的。另外，也可以用西勒维斯脱定理证明其正确性。应当指出，在将假定的平方根平方的过程中，要用到  $I$  与  $T$  的可交换性。由此我们想到，前面提到的微分算子可以表达为

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{1/2} = k + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots$$

其中假定  $k$  不是  $x$  的函数。如果  $k$  是  $x$  的函数，微分算子的平方根仍有意义，但没有用二项式定理计算这样简单。

### 练习

1. (5-2-6b) 左边乘以  $r_1$ 、(5-2-6c) 右边乘以  $c_2$ ，然后相减。问： $\lambda_1 \neq \lambda_2$  是不是  $r_1$  与  $c_2$  垂直的必要条件？是不是充分条件？

2. 证明凯莱-哈密勒顿 (Cayley-Hamilton) 定理，即：

$$\begin{aligned} \text{假定} \quad 0 &= f(\lambda) = \det(A - \lambda I) \\ &= p_0 + p_1\lambda + p_2\lambda^2 + \dots + p_n\lambda^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则有} \quad f(A) &= p_0 + p_1A + p_2A^2 + \dots + p_nA^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. 试验证：对于一般的  $2 \times 2$  矩阵  $A$  (假定其特征值  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ )， $c_1 r_1 = (\lambda_2 I - A) / (\lambda_2 - \lambda_1)$ 。

4. 对于对称矩阵可以证明它的特征向量的个数是全部的。对于非对称矩阵有时则不然。试研究矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 - \epsilon^2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

当  $\epsilon \rightarrow 0$  时，怎么会少了一个特征向量？这种矩阵称之为亏损矩阵。

5. 成层介质中波传播理论的许多问题可以归结为方程

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

问：当  $ab$  为正时，解与  $x$  有什么样的依赖关系？当  $ab$  为负时呢？设  $a$  和  $b$  与  $x$  无关。应用西勒维斯脱定理。在什么情况下会得到亏损矩阵呢？亏损矩阵如何求解？

6. 考虑形为  $I + vv^T$  的矩阵， $v$  为一列向量， $v^T$  为  $v$  的转置。试求  $(I + vv^T)^{-1}$ ；用  $vv^T$  的幂级数表示〔注： $(vv^T)^N$  相当于  $vv^T$  乘上一个标量因子，所以幂级数衰减很快〕。

7. 下列“叉积”矩阵在电动力学中常见到。令  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$

$$U = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}} \begin{bmatrix} 0 & -B_z & B_y \\ B_z & 0 & -B_x \\ -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

(a) 写出  $I + U^2$  的各元素。

(b) 证明： $U(I + U^2) = 0$  或  $U^3 = -U$ 。

(c) 设  $v$  为任意向量， $Uv$ 、 $U^2v$  和  $(I + U^2)v$  指向哪个几何方向？

(d) 求  $U$  的特征值。〔提示：用 (b) 的结果〕

(e) 为什么  $U$  不能从  $U^3 = -U$  式中消去？

(f) 验证  $U$  的幂等矩阵为

$$c_1 r_1 = (I + U^2)$$

$$c_2 r_2 = \frac{1}{2(iU - U^2)}$$

$$c_3 r_3 = \frac{1}{2(-iU - U^2)}$$

### 5-3 矩阵滤波器

由于在时间序列之间可能有相互作用，故同时研究两个时间序列比研究单个序列更有意义。图 5-2 是描述两个序列的通用线性模型。

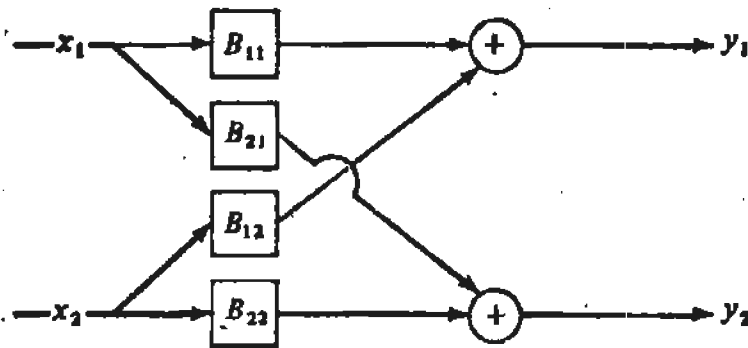


图 5-2

两个时间序列  $x_1$  与  $x_2$  输入到四个滤波器组成的矩阵，以此说明多道滤波器的通用线性模型。

图中滤波器的运算可以表示为一个矩阵乘向量的运算，而矩阵的元素和该向量都是  $Z$  变换多项式。即为

$$\begin{bmatrix} Y_1(Z) \\ Y_2(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}(Z) & B_{12}(Z) \\ B_{21}(Z) & B_{22}(Z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(Z) \\ X_2(Z) \end{bmatrix} \quad (5-3-1)$$

显然，以多项式为元素的矩阵与以矩阵为系数的多项式完全是同一个东西，但这一事实可能有些人还不熟悉。请看下例

$$\begin{bmatrix} 1+Z+2Z^2 & Z \\ 1 & 1+Z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Z^2$$

现在我们要提出一个反问题：若已知滤波器  $B$  和输出  $Y$ ，怎样找出输入  $x$ ？解法类似于求单道时间序列的反滤波器。

把  $B(Z)$  看作是一个以多项式为元素的矩阵。举例来说，任何的  $2 \times 2$  矩阵

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ 的逆矩阵为 } \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad - bc}$$

因此从  $Y = Bx$  可把  $x$  解出来，表示为  $x = B^{-1}Y$ ，其中

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} B_{22}(Z) & -B_{12}(Z) \\ -B_{21}(Z) & B_{11}(Z) \end{bmatrix} \frac{1}{B_{11}(Z)B_{22}(Z) - B_{12}(Z)B_{21}(Z)}$$

分母是个标量。我们在以前也处理过标量分母。如果它所有的零点都位于单位圆外，我们可以用一个普通的幂级数表示它的逆；否则，它就不是最小相位，而要用罗朗级数表示了。

将上面所讲的推广到多道时间序列时，则其分子矩阵被称为伴随矩阵，分母为行列式。用不着做任何除法运算就可以构成伴随矩阵。换句话说，伴随矩阵中的元素是以乘积和的形式出现的。根据这个道理，可以说，矩阵子波是最小相位的判别准则是：它的  $Z$  变换的行列式在单位圆内没有零点。

在大多数实际应用中，等式(5-3-1)对图5-2所示流程是适用的。但有些应用中(当要反求未知的滤波器时)，则(5-3-1)的转置形式更为有用。如果图5-2中  $B_{12}$  与  $B_{21}$  互换，我们可应用“行数据”表达式

$$\begin{bmatrix} Y_1(Z) & Y_2(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(Z) & X_2(Z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (5-3-2)$$

现在我们将滤波概念从标量值时间序列推广到向量值序列了，自然也要将谱的概念加以推广。对于向量值时间序

列函数，它的谱是一个称作谱矩阵的矩阵，由下式给出

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1\left(\frac{1}{Z}\right) \\ \bar{Y}_2\left(\frac{1}{Z}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(Z) & Y_2(Z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 Y_1 & \bar{Y}_1 Y_2 \\ \bar{Y}_2 Y_1 & \bar{Y}_2 Y_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-3-3)$$

要指出，(5-3-3)中向量乘向量的运算是“外积”，而不是平常所见的“内积”。谱矩阵  $R$  的对角线上包含各道的自谱。非对角线上为它们的互谱。因为 (5-3-3) 是个“外积”。故矩阵是奇异的。现在不要求  $[Y_1(Z)Y_2(Z)]$  具有有限能量的时间函数，而是假定(5-3-2)中滤波的输入，即  $[x_1(t), x_2(t)]$  是由随机数组成的，这些数是相互独立地在每个时间点上观察某概率函数得到的。在这种情况下， $y_1(t)$  和  $y_2(t)$  是随机时间序列，其谱矩阵象(5-3-3)那样定义，但要取其期望值(总体均值)。我们得到

$$\begin{aligned} R(\omega) &= E \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \\ R(\omega) &= E \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{21} \\ \bar{B}_{12} & \bar{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

求期望仅与随机变量有关，我们得

$$R = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{21} \\ \bar{B}_{12} & \bar{B}_{22} \end{bmatrix} \left\{ E \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (5-3-4)$$

下面，假定：随机数  $x_1(t)$  与  $x_2(t)$  是独立地得到的，因此  $E$

$[\bar{X}_2(1/z)X_1(z)] = 0$ , 又假定:  $x_1(t)$  是白噪, 即当  $s \neq 0$  时,  $E[x_1(t)x_1(t+s)] = 0$ ; 当  $s = 0$  时,  $E[x_1(t)^2] = 1$ 。于是 (5-3-4) 变为

$$\begin{aligned} R &= \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{21} \\ \bar{B}_{12} & \bar{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{21} \\ \bar{B}_{12} & \bar{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-3-5)$$

自然, 在实际应用中必须从有限的数据采样估计确定谱矩阵, 谱矩阵的估计记为  $\hat{R}$ 。这说明必须对总体求和作模拟。如果 (5-3-4) 中的总体和是以对一个点的求和 (没有求和) 来模拟的, 则 (5-3-4) 如 (5-3-3) 一样是奇异矩阵。在前面曾讨论过, 谱矩阵元素的精度随着对总体求和的元素个数的平方根而提高。

单道谱的因式分解有助于深入理解许多数学物理中的重要问题。我们已经看到, 可将滤波器和谱的概念以一种很有用的形式扩展到多道数据。要这样作, 必须在多道数据的谱的因式分解上作些努力。这一点已经作到了。但是回想起来, 从建立计算模型和解释工作的观点来看, 必须指出: 多道谱的因式分解并不是特别有用处的。尽管如此, 下面还是简要地介绍一下。

**求根法** 作者曾把单道的求根法扩展到多道的情形<sup>[19]</sup>。这个方法在多道情况下变得更为繁琐。其主要特点在于以矩阵为系数的多项式的因式分解结果不是唯一的。例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 14 & -11 \end{bmatrix} + Z^2 \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -58 & 28 \end{bmatrix}$$

可以写出其六种分解

$$\begin{aligned} & \left\{ I + Z \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 20 & -7 \end{bmatrix} \right\} \left\{ I + Z \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \right\} \quad \left\{ I + Z \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \right\} \left\{ I + Z \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 24 & -9 \end{bmatrix} \right\} \\ & \left\{ I + Z \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & -7 \end{bmatrix} \right\} \left\{ I + Z \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \right\} \quad \left\{ I + Z \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \right\} \left\{ I + Z \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 18 & -8 \end{bmatrix} \right\} \\ & \left\{ I + Z \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 8 & -7 \end{bmatrix} \right\} \left\{ I + Z \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \right\} \quad \left\{ I + Z \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \right\} \left\{ I + Z \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 12 & -6 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

**陶布里兹方法** 这方法是在已知谱的条件下，求出其逆矩阵子波的唯一可行的方法。在下一章讨论到多道时间序列预报时，将叙述一些必要的知识。

**指数-对数法和希尔伯特变换方法** 许多著名数学家包括维纳 (Wiener) 在内，都曾研究过把指数-对数法或希尔伯特变换推广应用到多道时间序列的问题。遇到的主要难点是  $\exp(A+B)$  一般不等于  $\exp(A)\exp(B)$ ，除非  $A$  与  $B$  是可交换的，即  $AB=BA$ ，但这一点通常并不成立。虽然为此发表了很多难懂的文章(有些还声称他们已把问题解决了)，但作者还不知道是否有人对多道情况曾编出象作单道希尔伯特变换要使用的那种类似于快速傅里叶变换快速程序。

### 练习

1. 有一个矩阵滤波器，其输出  $y_1(t)$  与  $y_2(t)$  只差一个标量因子。显然此时不能从  $Y$  而恢复  $X$ 。求证：该滤波器的行列式为零。试找出另一个例子，它的行列式于某个频率为零，但在其它频率皆不为零。试从时间域上解释：在什么意义下不可能从输出恢复其输入。

2. 给定一温度计：它测出的是温度加上  $\alpha$  乘以压力；一压力计：它测出的是压力加  $\beta$  乘以温度对时间的变化率。试求把所观测到的序列转换为温度与压力的矩阵滤波器〔提示：利用时间微分近似式  $1-Z$  或  $2(1-Z)/(1+Z)$ 〕。

## 3. 设

$$\mathbf{B}(Z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

比较  $\mathbf{B}(Z)\mathbf{A}(Z) = \mathbf{I}$  中  $Z$  的同次幂的系数，导出求  $\mathbf{A}(Z) = [\mathbf{B}(Z)]^{-1}$  的系数的递推公式。

## 4. 试将

$$\begin{bmatrix} 1+2Z & Z \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵表示为台劳级数或罗朗级数。

5. 一个以矩阵为系数的多项式，它的行列式可以与  $Z$  无关。将此应用于矩阵滤波器，意思就是一个反滤波器可以仅仅有有限个数的  $Z$ ，而不是象标量滤波器那样非是无穷级数不可。你能举出你认为有点意思的例子吗？

## 5-4 马尔可夫链

马尔可夫链是时间序列的又一种数学模型。到目前为止，在地球物理中用的很少；但我们还是讲一下，因为它将来可能有用，而且很容易用前述方法来解释清楚。

假定  $x_t$  仅取整数值。一个给定的整数值称为一个状态。时间每前进一步，按照转移概率矩阵  $p_{ij}$ ，由第  $i$  个状态转移到第  $j$  个状态。假定系统没有记忆能力，即下一次的的状态，在概率上仅与当前的状态有关，而与以前的状态无关。形象化的例子是百合花池中的青蛙。随着时间的推移，青蛙从一朵百合花跳到另外一朵。它很可能喜欢跳到近的一朵，而不是远的一朵。也可能愿意大跳一下而不愿小跳，但它记不得前一次所在的位置。系统的状态就是青蛙现在所在位置的编



号。青蛙的蹦跳就是所说的转移。

先规定状态概率  $\pi_i(k)$ ，表示系统经  $k$  步转移后，正处于状态  $i$  的概率，此时假定已知  $k=0$  时系统的状态。此外，还要规定转移概率矩阵  $p_{ij}$ 。因此

$$\pi(k+1) = \mathbf{P}\pi(k) \quad (5-4-1)$$

初态概率向量记为  $\pi(0)$ 。由于初始状态为已知，所以  $\pi(0)$  中，除在初始状态的位置上有一个 1 之外，其它全为零。有关例子可看图 5-3 的状态-转移图解。

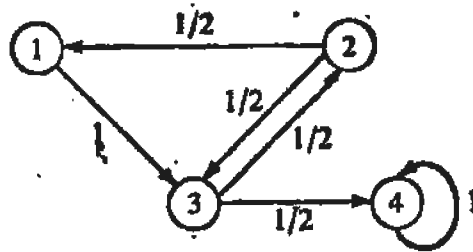


图 5-3  
状态-转移图解一例

此图对应于概率矩阵

$$\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{bmatrix}_k$$

因为在每一时刻必定要有一次转移，所以每列的元素之和必须是 1。行向量  $[1 \ 1 \ 1 \ 1]$  是  $\mathbf{P}$  的特征向量，其特征值为 1。我们规定概率向量  $\pi(k)$  的  $Z$  变换为

$$\Pi(Z) = \pi(0) + Z\pi(1) + Z^2\pi(2) + \dots \quad (5-4-2)$$

以  $Z$  变换表示, (5-4-1) 变为

$$[\pi(1) + Z\pi(2) + \dots] = \mathbf{P}[\pi(0) + Z\pi(1) + \dots]$$

$$Z^{-1}[\Pi(Z) - \pi(0)] = \mathbf{P}\Pi(Z)$$

$$(1 - Z\mathbf{P})\Pi(Z) = \pi(0)$$

$$\Pi(Z) = (1 - Z\mathbf{P})^{-1}\pi(0) \quad (5-4-3)$$

这样, 我们得到了通解的表达式: 矩阵  $\mathbf{P}$  的函数乘以初态向量。有些  $Z$  值,  $(1 - Z\mathbf{P})$  的逆矩阵不存在。这些  $Z_j$ , 可由  $\det(1 - Z_j\mathbf{P}) = 0$  或  $\det(\mathbf{P} - Z_j^{-1}\mathbf{I}) = 0$  求出来。很明显,  $Z_j^{-1}$  是  $\mathbf{P}$  的特征值。引用西勒维斯脱定理, 得

$$(1 - Z\mathbf{P})^{-1} = \sum_j \frac{c_j r_j}{1 - \frac{Z}{Z_j}} \quad (5-4-4)$$

如果出现重特征值, 就要求对 (5-4-4) 式作点修改。等式 (5-4-4) 实质上是部分分式的展开式。其一般项有如下形式

$$\frac{1}{1 - \frac{Z}{Z_j}} = 1 + \frac{Z}{Z_j} + \left(\frac{Z}{Z_j}\right)^2 + \dots$$

可见  $Z$  的各次幂的系数以  $(Z_j^{-1})^t$  的形式随时间  $t$  而逐渐衰减。显然, 概率是有界的, 根  $1/Z_j$  必须位于单位圆内 (回想最小相位)。我们已经证明它的一个根  $Z_1$  总为 1。这就得出“稳态”解  $1^t = 1$ 。在我们举的特例中, 通过检验可看出: 稳态概率向量是  $[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ , 所以通解有下列形式

$$\pi(t) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left( [1 \ 1 \ 1 \ 1] + \sum_{j=2}^4 Z_j^{-t} c_j r_j \right) \pi(0)$$

最后, 要提醒一句。有时会出现亏损矩阵 (特征向量不

全), 对它们不能应用西勒维斯脱定理。在这种情况下, 它的解中除了有象  $Z_j^t$  的项外, 还有象  $tZ^{-t}$  和  $t^2Z^{-t}$  的项。这与该定理应用于常系数常微分方程的情况相同。通常, 解的形式是  $(r_i)^t$ ,  $r_i$  是指数方程的第  $i$  个根, 但由于出现重根也就产生象  $tr_1^t$  那样的解。这方面的数学论述见西纳脱 (Seneta) 的著作〔20〕。

## 第6章 最小二乘法拟合

理论与数据相一致是科学的根本任务。解决这个任务，常用最小二乘法作数据拟合。最小二乘法也称为最小平方法。初等微积分书上，一般都用直线去拟合分散的数据点。这种初等的应用，对于种种可以用最小二乘法去解决的实际问题都有一定启发。我们将举出地球物理方面的例子，包括天然地震测定、趋势分析、地重力场和地磁场的球面调和函数展开，以及用时间序列进行的一些有趣的分析，等等。当已知一时间序列的过去，就可以用最小二乘法设计一个能预测该时间序列的将来值的滤波器。当一个时间序列开始在一长段时间里预测得较好，而突然变得预测性很差时，就说是已发生了一个“事件”。着重处理这类事件的滤波器称为预测误差滤波器。要在时间序列中找寻某一个跨度较宽的子波时，设计一种能将该子波压缩成较易辨认的波形（例如，成为脉冲形状）的滤波器，对时间序列进行滤波之后，可能有助于查找这个子波。这类压缩波形的滤波器也可以用最小二乘法设计出来。若干个仪器同时探测空间里的波，得到多道时间序列，用最小平方法可以找到仅对某些方向和某些波速有响应的滤波器。

在介绍一般理论之前，我们先研究时间序列分析中的一个简单例子。设已给定输入  $X = (2, 1)$ ，滤波器为  $f = (f_0, f_1)$ ；那么输出是  $c = (2f_0, f_0 + 2f_1, f_1)$ 。要设计一个滤波器，希望得到的  $c$  尽量地接近于  $(1, 0, 0)$ 。为使实际输出与要求

输出之间的差异最小，我们求下式的极小

$$E(f_0, f_1) = (2f_0 - 1)^2 + (f_0 + 2f_1)^2 + (f_1)^2$$

选择  $f_0$  与  $f_1$  使其满足下式，即可使  $E$  达到极小

$$0 = \frac{\partial E}{\partial f_0} = 2(2f_0 - 1)2 + 2(f_0 + 2f_1)$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial f_1} = 2(f_0 + 2f_1)2 + 2f_1$$

消去 2，并整理成联立方程的标准形式，得

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其解为

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{21} \\ -\frac{4}{21} \end{bmatrix}$$

此滤波器的实际输出  $c$  为  $(\frac{20}{21}, +\frac{2}{21}, -\frac{4}{21})$ ，很近似于  $(1, 0, 0)$ 。

译注：在以后的叙述中，对于联立方程组，若方程个数多于未知数个数，则该方程组称为超定方程组；反之，若方程个数少于未知数个数，则称为欠定方程组。

## 6-1 方程个数多于未知数个数

当线性方程的个数超过未知数个数时，一般不可能找到满足所有方程的解。此时，经常是求近似地满足所有方程的解。设在下列方程组中  $a$  与  $c$  为已知、 $X$  为未知，方程个数

超过未知数个数 ( $n > m$ )。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ a_{31} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (6-1-1)$$

一般不存在一组完全满足 (6-1-1) 的  $x_i$ 。我们以误差向量  $e_j$  表示

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad (6-1-2)$$

将它改写成下式可使讨论简化

$$\begin{pmatrix} -c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ -c_2 & a_{21} & & \\ -c_3 & & & \\ \vdots & & & \\ -c_n & a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad (6-1-3)$$

此方程可缩写成

$$\mathbf{Bx} = \mathbf{e} \quad (6-1-4)$$

式中  $\mathbf{B}$  是含有  $c$  与  $a$  的矩阵。第  $i$  个误差可写成两向量 (其中一个为列向量) 的点积

$$e_i = (b_{i1} \quad b_{i2} \quad \dots) \begin{bmatrix} -1 \\ x_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = [1 \quad x_1 \quad \dots] \begin{bmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

现在我们求误差的平方和  $E$  (定义为  $\sum e_i^2$ ) 的极小值

$$E = \sum_i [1 \quad x_1 \quad \dots] \begin{bmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \vdots \end{bmatrix} (b_{i1} \quad b_{i2} \quad \dots) \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6-1-5)$$

求和符号可以搬到常数里边去

$$E = [1 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots] \left\{ \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} -c_i \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \end{bmatrix} [-c_i \quad a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots] \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6-1-6)$$

位于中间的矩阵 (元素为  $r_{ij}$ ) 是对称的。它是正定的 (更为严格地说是非负定的) 矩阵, 因为  $E$  是  $e_i$  的平方和, 故不可能找到一个  $X$  使  $E$  取负值。我们通过令  $\partial E / \partial x_1 = 0$ ,  $\partial E / \partial x_2 = 0, \dots, \partial E / \partial x_m = 0$  找出使  $E$  达到最小的  $X$ 。注意, 这样对每一个未知数恰好可得到一个方程式。为简单明了起见, 我们考虑 (6-1-6) 只有两个未知数的情形

$$E = [1 \quad x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6-1-7)$$

令其对  $x_1$  的偏微商等于零, 得 (以  $R$  表示  $r_{ij}$  组成的矩阵)

$$0 = \frac{\partial E}{\partial x_1} = [0 \quad 1 \quad 0]R \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [1 \quad x_1 \quad x_2]R \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-1-8)$$

由于  $r_{ij} = r_{ji}$ , 右边两项相等。所以 (6-1-8) 可写成

$$0 = \frac{\partial E}{\partial x_1} = 2[r_{10} \quad r_{11} \quad r_{12}] \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6-1-9)$$

类似地, 求其对  $x_2$  的偏微商得

$$0 = \frac{\partial E}{\partial x_2} = 2[r_{20} \quad r_{21} \quad r_{22}] \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6-1-10)$$

合并方程 (6-1-9) 和 (6-1-10) 得

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6-1-11)$$

这是含两个未知数的两个方程式。也可以写成更为常见的形式

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{10} \\ r_{20} \end{bmatrix} \quad (6-1-12)$$

(6-1-11) 中的矩阵与 (6-1-7) 中的矩阵相比, 只缺顶上的一行。为了补上这一行, 可以在 (6-1-11) 中加进一个新变量

$$v = r_{00} + r_{01}x_1 + r_{02}x_2 \quad (6-1-13)$$

将 (6-1-13) 置于 (6-1-11) 的顶部, 得

$$\begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6-1-14)$$

(6-1-12) 或 (6-1-14) 的解  $X$  即使  $E$  的值达到最小的



那一组  $x_k$ 。为了解释  $v$  的含义，两边同乘以  $[1 X_1 X_2]$ ，得

$$v = [1 x_1 x_2] \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1 x_1 x_2] R \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6-1-15)$$

比较 (6-1-15) 与 (6-1-7)，可知  $v$  是  $E$  的极小值。

有时用分块矩阵形式更便于反映本质。按分块形式，误差 (6-1-6) 可写成下式

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & x \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -c^T \\ \vdots \\ A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c & \vdots & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ x \end{bmatrix} \quad (6-1-16)$$

方程 (6-1-14) 最后分裂为

$$V = c^T c - c^T A x \quad (6-1-17)$$

$$0 = -A^T c + A^T A x \quad (6-1-18)$$

(6-1-18) 表示了对  $x$  求解的联立方程组。这正是要用计算机进行求解的方程。我们可以用一个快的方法来记住这个方程。对于超定方程  $Ax \approx c$ ，左乘以  $A^T$  得  $(A^T A)x = A^T c$ ，此即 (6-1-18)。

在物理应用中，变量  $Z_j$  常常是复变量，表示为  $Z_j = x_j + iy_j$ 。在分析问题的全过程中，总可以把  $x_i$  和  $y_i$  看作是两个独立的实变量。这样做可以使分析大大简化，较之将  $Z_j$  当作单个复变量处理可以大大减少计算工作量。误差  $E$  可以看作是  $x_j$  与  $y_j$  或  $z_j$  与  $\bar{z}_j$  的函数。一般情况下  $j=1, 2, \dots, N$ ，但我们在这里只讨论  $N=1$  的情况，一般情形的讨论留作练习。求其极小

$$0 = \frac{dE}{dx} = \frac{\partial E}{\partial z} \frac{dz}{dx} + \frac{\partial E}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dx}$$

$$= \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial E}{\partial \bar{z}} \quad (6-1-19)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dE}{dy} = \frac{\partial E}{\partial z} \frac{dz}{dy} + \frac{\partial E}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dy} \\ &= i \left( \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{\partial E}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned} \quad (6-1-20)$$

(6-1-20) 乘以  $i$ ，然后两式相加、相减，可将其极小条件表达成更为简化的形式

$$0 = \frac{\partial E}{\partial z} \quad (6-1-21)$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial \bar{z}} \quad (6-1-22)$$

不过，常见的情形是  $E$  为  $z$  与  $\bar{z}$  的正二次实函数，而  $\partial E/\partial z$  正好是  $\partial E/\partial \bar{z}$  的复共轭。因此 (6-1-21) 与 (6-1-22) 两个条件可以用它们中的一个来代替。通常，当取复变量时，我们要求下面的正二次型的极小

$$E(z^*, z) = |Az - c|^2 = (z^* A^* - c^*)(Az - c) \quad (6-1-23)$$

其中  $*$  表示复共轭转置。由 (6-1-22) 得

$$0 = \frac{\partial E}{\partial z^*} = A^*(Az - c) \quad (6-1-24)$$

这正是 (6-1-18) 的复形式。

下面研究一个例子。假定一波组的波至 (时间) 在  $x$  轴上的  $x_1$  各点上测定为  $t_1$ 。假定波前近似地是抛物线形状  $t_1 \approx a + bx_1 + cx_1^2$ 。在此， $x_1$  为已知， $a$ 、 $b$  和  $c$  为未知。

对每一检波点  $i$ , 我们得到一个方程

$$[-t_i \quad 1 \quad x_i \quad x_i^2] \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} \approx 0 \quad (6-1-25)$$

当  $i$  取值大于 3 时, 我们得到的方程个数便超过了未知数的个数。在本例中, (6-1-14) 所取形式如下

$$\left( \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} -t_i \\ 1 \\ x_i \\ x_i^2 \end{bmatrix} [-t_i \quad 1 \quad x_i \quad x_i^2] \right) \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-1-26)$$

此方程可用标准方法解出  $a$ 、 $b$  和  $c$ 。

(6-1-26) 式最后三行可写为

$$\sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 1 \\ x_i \\ x_i^2 \end{bmatrix} e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-1-27)$$

这说明, 误差向量  $e_i$  垂直 (或正交) 于与数据相拟合的函数  $1$ 、 $x$  与  $x^2$ 。因此, 这些方程常称为正交方程。

### 练习

1. 为拟合在  $x$ 、 $y$  平面上观测到的波, 试将 (6-1-24) 扩展为二维的二次式。

2. 令  $y(t)$  为在  $t$  的相邻整数点上取复值的函数。用最小二乘法求  $y(t)$  的拟合直线  $y(t) \approx a + \beta t$ , 其中  $a = a_r + ia_i$ ,  $\beta = \beta_r + i\beta_i$ 。可采用两种做法: (a) 假定  $a_r$ 、 $a_i$ 、 $\beta_i$  和  $\beta_r$  是四个独立变量; (b) 假定  $a$ 、 $\bar{a}$ 、 $\beta$  和  $\bar{\beta}$  为独立变量。

3. 在方程 (6-1-14) 中假定所有的量均为实数。将方

程 (6-1-14) 推广为所有的量为复数的情形。验证：其矩阵为赫米森 (Hermitian) 矩阵。

4. 于第  $j$  个地震观测站 (纬度为  $x_j$ 、经度为  $y_j$ )，观察到天然地震波的到达时间为  $t_j$ 。推想此次地震发生时间为  $t$ ，地点在纬度  $x$  与经度  $y$ 。理论的旅行时可以在旅行时间表  $T(\Delta)$  ( $T$  为旅行时、 $\Delta$  为大圆角) 表中查出。有关系式

$$\cos \Delta = \sin y \sin y_1 + \cos y \cos y_1 \cos(x - x_1)$$

假定在  $(x, y, t)$  发生了地震，则第  $j$  个地震站的时间剩余为

$$e_j = t + T(\Delta_j) - t_j$$

假定地震发生在  $(x + dx, y + dy, t + dt)$ ，则时间剩余为

$$e_j = t + dt + T(\Delta_j) + \left( \frac{\partial T}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right)_j dx + \left( \frac{\partial T}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial y} \right)_j dy - t_j$$

试推导关于  $dx$ 、 $dy$  和  $dt$  的使时间剩余的平方和达到最小的方程。

5. 在地面不规则分布的  $N$  个点上 (余纬为  $x_j$ 、经度为  $y_j$ ,  $j=1, N$ ) 测得重力值  $g_j$ 。求证：对数据作球面调和函数拟合的正交方程的矩阵可以按上述那样写成一列向量乘上其转置的和。假想有无穷多个同样分布的数据点，该矩阵可作怎样的简化？〔注：球面调和函数  $S$  是函数类 ( $n=0, 1, \dots, \infty$ ;  $m=-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$ )

$$S_n^m(x, y) = P_n^m(\cos x) \exp(imy)$$

式中  $P_n^m$  为  $n$  次、 $m$  阶勒让德 (Legendre) 多项式。〕

6. 海洋潮汐与已知的一些频率的正弦函数拟合得很

好。伴随潮汐出现地壳倾斜。其南北倾斜加上 $\sqrt{-1}$ 乘以东西倾斜组成一个复时间序列。观察得到的复时间序列可用解析式 $\sum_{j=1}^N A_j e^{i\omega_j t}$ 作拟合。试找一组含 $A_j$ 的方程,使求出的 $A_j$ 能使此解析式达到对数据的最佳拟合。证明:其正交方程矩阵的一些元素是可用解析式表示的和。

7. 关于位势场的拉普拉斯方程的通解(用极坐标表示,在 $r = \infty$ 处, $P$ 为零)为

$$P(r, \theta) = \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{e^{im\theta}}{r^{m+1}}$$

试求位于原点的位势为1的正方体周围的位势。为此,可通过使 $P(r, \theta)$ 与1的差的平方围绕该正方体的积分达到极小以求出 $N$ 个系数 $A_m$ 。用积分的逆矩阵来表示所得的结果。根据对称性,哪些系数 $A_m$ 恰好为零?

## 6-2 加权与约束

经常出现这样的情况,某些观测值比另外一些观测值更为可信。人们可根据需要在计算中对更为可信的数据加权重一些。换句话说,我们可以对第 $i$ 个方程乘上权 $\sqrt{w_i}$

$$\sqrt{w_i} [-c_i \ a_{i1} \ a_{i2} \ \dots] \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \sqrt{w_i} e_i \quad (6-2-1)$$

加权后误差的平方和为

$$E = \sum_i w_i e_i^2 \quad (6-2-2)$$

照上一节所述方法,很容易证实:使(6-2-2)的加权误差 $E$ 取

极小值的  $X$  满足联立方程

$$\left\{ \sum_i w_i \begin{bmatrix} -c_i \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_i & a_{i1} & a_{i2} & \dots \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(6-2-3)

选择加权值经常是件比较主观的事情。不过，如果数据确有不平衡性，也只得作这种主观的选择。不出现  $w$  的情况相当于选定权系数为 1。

普遍感兴趣的是方程能够准确地求解的情况。这类方程称为约束方程。约束方程经常是从理论研究中得出的，所以它们从原则上讲没有任何误差。其余的一些方程往往含有一些测量的结果。由于测量通常可以进行多次，因此很容易得到比未知数个数多得多的方程。又因为测量总是含有误差，从而要用最小二乘法使其平均误差减至最小。为了确使约束方程准确地求解，可以对约束方程加上很大的权。问题在于“很大”是什么意思呢？取等于  $10^{10}$  的权可能对保证约束方程满足足够精度还不够大。而另一方面，当在精度不高的计算机上求解联立方程时， $10^{10}$  这个数可能会导致破坏性的舍入了。最好的办法还是对  $w \rightarrow \infty$  的情况作理论上的分析。

$x_1$  的和等于  $m$ ，可构成一个约束方程。 $x_1 = x_2$  又可构成另一个约束方程。把这两个约束方程排成一矩阵，得

$$\begin{bmatrix} -M & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(6-2-4)

$k$  个约束方程的一般形式为

$$G \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6-2-5)$$

当  $w \rightarrow \infty$  时, 使下列两方程

$$\sqrt{w} Gx \approx 0 \textcircled{1}$$

$$Bx \approx 0 \textcircled{2}$$

的误差达到最小。求法上类似于使  $Bx \approx 0$  的误差达到最小。想象把  $\sqrt{w} G$  的各行附加到  $B$  中, 通过取极小得到关于  $x$  的方程为

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} -c_i \\ a_{i1} \\ \vdots \end{bmatrix} [-c_i \ a_{i1} \ \dots] + \sum_{i=1}^k w_i \begin{bmatrix} g_{i0} \\ g_{i1} \\ \vdots \end{bmatrix} [g_{i0} \ g_{i1} \ \dots] \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6-2-6)$$

现在取所有的  $w_i$  等于  $1/\varepsilon$ , 并将令  $\varepsilon$  趋近于零。再令

$$x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \varepsilon^2 x^{(2)} + \dots \quad (6-2-7a)$$

$$v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \dots \quad (6-2-7b)$$

因而 (6-2-6) 可以写成

$$(B^T B + \frac{1}{\varepsilon} G^T G) (x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \dots) = v^{(0)} + v^{(1)} \varepsilon + \dots \quad (6-2-8)$$

① 约束方程。

② 其余的方程含测量结果。——译者注

等式两边  $e$  的同次幂的系数相等, 有

$$e^{-1}, \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{x}^{(0)} = 0 \quad (6-2-9a)$$

$$e^0: \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{v}^{(0)} \quad (6-2-9b)$$

$e^1, e^2$ , 不需要

(6-2-9a) 是含  $m$  个未知数的  $m$  个方程。当 (6-2-5) 中的  $k$  个方程被满足时, (6-2-9a) 自然也被满足。方程 (6-2-9b) 含有  $\mathbf{x}^{(0)}$  中的  $m$  个未知数再加上  $\mathbf{x}^{(1)}$  中的  $m$  个未知数。事实上, 我们不需要  $\mathbf{x}^{(1)}$ , 转为下列  $k$  个未知数就够了

$$\lambda = \mathbf{G} \mathbf{x}^{(1)} \quad (6-2-10)$$

将 (6-2-9b) 和 (6-2-5) 拼在一起, 并抹掉上标, 我们得到含有  $m+k$  个未知数的方阵

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}^T \mathbf{B} & \mathbf{G}^T \\ \hline \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6-2-11)$$

方程 (6-2-11) 是关于未知数  $\mathbf{x}$  与  $\lambda$  的一个联立方程组。它也可以看成是下列二次型的极值问题的解

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \lambda^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{B} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{x} + \lambda^T \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{G}^T \lambda \end{aligned}$$

且由于标量取转置仍等于它本身 [译注:  $\mathbf{x}^T \mathbf{G}^T \lambda = (\mathbf{x}^T \mathbf{G}^T \lambda)^T = \lambda^T \mathbf{G} \mathbf{x}$ ], 所以得到

$$E = \mathbf{x}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{x} + 2\lambda^T \mathbf{G} \mathbf{x} \quad (6-2-12)$$

根据拉格朗日 (Lagrange) 乘子法, 带有约束条件的二次型求极小问题, 相当于该二次型加上各约束项 (每一约束项为一约束方程与一拉格朗日乘子  $\lambda_i$  的乘积) 之和的极小值问题。这正是我们所得到的 (6-2-12), 其解由 (6-2-11)



给出。拉格朗日乘子法在解积分方程时经常用到。这个方法很容易借用到矩阵中来，仅仅只要用求和法来代替近似积分。

### 练习

1. 在确定地球的密度-深度剖面时，要对一些理论值（例如：自由振荡的频率）与观测值之差的平方求极小。从天文学的意义上说，地球的总质量和转动惯量均为已知。若地球分为等厚度的若干薄块，向加于层密度  $\rho_i$  的两个天文约束方程是怎样的？当最小平方问题是非线性的（通常如此），则可以将它线性化：假设有一组密度值  $\rho_i$  是满足约束的准确推测值，而对扰动  $d\rho_i$  解最小平方问题。问此时加于  $d\rho_i$  上的约束方程是怎样的？

### 6-3 方程个数少于未知数个数

遇到方程个数少于未知数个数的情况又怎样处理呢？放弃吗？当然不能，这里要用到简化原理。我们要求出满足所有这些方程的最简单解。方程个数少于未知数个数的情况是经常发生的。假如，在作完有限次测量之后，要求确定一个连续函数，例如，确定地球中深度为  $r$  处的物质密度  $\rho(r)$ 。于是，在计算机中， $\rho(r)$  通过它在深度  $r_i (i=1, 2, \dots, N)$  处的  $N$  个点的采样  $\rho(r_i)$  表示出来。因此，只要  $N$  取大一点，未知数个数会比方程个数多。

一种简化办法是使未知函数  $X_i$  摆动得最小，即要使下式达到极小

$$E = \sum (X_i - X_{i-1})^2 \quad (6-3-1)$$

同时又要完全满足观测结果或约束方程

$$Gx = 0 \quad (6-3-2)$$

再一种更为常用的简化办法（不涉及变量  $x_1$  的次序）是使下式达到极小

$$E = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (6-3-3)$$

如果我们不考虑任何约束条件，求 (6-3-3) 式的极小，则  $x$  将满足下面的联立方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \\ & & 1 \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

显然  $x_1 = 0$  是个解。现在引入两个约束方程，同时为了确切起见，让它们含有三个未知数。按上一节的方法，得到

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & & & -d_1 & -d_2 \\ & 1 & & g_{11} & g_{21} \\ & & 1 & g_{12} & g_{22} \\ & & & 1 & g_{23} \\ \hline -d_1 g_{11} g_{12} g_{13} & & & 0 & 0 \\ -d_2 g_{21} g_{22} g_{23} & & & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-3-4)$$

(6-3-4) 中，从方程个数来看，等于变量个数加上约束个数。可以求出它的数值解，或将它的解明确地表示出来。将 (6-3-4) 分为两个方程

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \\ g_{13} & g_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-3-5)$$

及

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (6-3-6)$$

将它们简记为  $x + G^T \lambda = 0$  和  $Gx = d$ 。以  $G$  左乘 (6-3-5) 式得

$$Gx + GG^T \lambda = 0$$

将 (6-3-6) 代入得

$$d + GG^T \lambda = 0$$

解出  $\lambda$

$$\lambda = -(GG^T)^{-1}d$$

代回到 (6-3-5) 式, 得

$$x = G^T (GG^T)^{-1}d$$

将此式完整地写出来就是

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GG^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d \end{bmatrix} \quad (6-3-7)$$

这就是最后结果, 即极小摆动的解  $x$ , 它完全满足待定的约束方程组。

### 练习

1. 若摆动量定为 (6-3-1), 而不是 (6-3-3), 则 (6-3-7) 式取什么形式?

2. 已知地球的质量和转动惯量。应用最小摆动原理 (6-3-7) 计算物质密度 (作为深度的函数)。对这种表示法有什么进一步的看法? (提示: 完美的解用积分表示而不用无穷项和)

3. 把本节中讲的方法用到 (6-2-11), 以降低求逆的矩

阵的阶。

#### 6-4 豪斯贺德变换和哥路伯方法

前面有关最小二乘法的讨论，总是引出  $A^T A$  这种形式的矩阵，而且要求它的逆矩阵。哥路伯 (Golub) 法借助于豪斯贺德 (Householder) 变换<sup>[21]</sup>，可以不求  $A^T A$  的逆而直接对矩阵  $A$  作处理，其精度比求  $A^T A$  的逆的方法还高很多。所以我们对它作一介绍。再者，哥路伯方法中，计算是按完全不同的思路安排的；在不同的应用中各有优劣，可供选择使用。

反射变换是形为  $R = (I - 2vv^T/v^T v)$  的矩阵，其中  $v$  为任一向量。显然  $R$  是对称的，亦即  $R = R^T$ 。还有反射变换的逆就是它本身，亦即  $R = R^{-1}$ 。为证实这一点，只须验证  $R^2 = I$

$$\left(I - \frac{2vv^T}{v^T v}\right)^2 = I - \frac{4vv^T}{v^T v} + \frac{4v(v^T v)v^T}{(v^T v)^2} = I$$

(6-4-1)

若矩阵变换  $M$  具有性质  $M^T M = I$ ，则  $M$  称为酉矩阵 (酉变换)。当一个矩阵  $M$  是酉矩阵，则向量  $x$  与向量  $Mx$  的长度相等。它们的长度为  $x^T x$  且  $(Mx)^T (Mx) = x^T M^T M x = x^T I x = x^T x$ ，均相等。反射变换为酉变换，因为  $R^{-1} = R^T$ 。反射变换有一简单的物理解释。考虑一个正交坐标系，其中一个坐标轴定在  $v$  向量上。反射变换改变这个坐标轴向量的符号 (因  $Rv = -v$ )，但所有其它坐标轴向量保持不变。因此从几何上看，反射变换显然保持长度，而且经两次变换就将原始向量还原为其本身。现在我们要找出一种称作豪斯贺德的特

殊变换，它将下式中左边形式的矩阵变换为右边的形式，其中元素  $a$  是任意的（译注：这里一大片  $a$ ，并不意味着这些元素相同，仅意味着这里每个元素都是任意的）。

$$H \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (6-4-2)$$

有了这样的变换，我们就可以利用它把任一矩阵逐次变换成一个上三角形式的矩阵，如

$$\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-4-3)$$

哥路伯认识到这方法可用来解超定联立方程组。他注意到，当误差向量  $\mathbf{e} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$  用酉矩阵  $\mathbf{Ue}$  作过变换后， $\mathbf{Ue}$  的长度  $(\mathbf{e}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{e})^{1/2}$  对  $\mathbf{x}$  取极小值的问题也就是  $\mathbf{e}$  的长度  $(\mathbf{e}^T \mathbf{e})^{1/2}$  对  $\mathbf{x}$  取极小值的问题。因此，可逐次应用豪斯贺德变换，把  $\mathbf{e} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$  化为下列形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix} \quad (6-4-4)$$

由于变换后的矩阵  $A$  的底部全为零，所以很容易看出，任意选择  $x_1$  的值都不会改变  $e_3$ 。变换后的矩阵  $A$  的上部为一上三角矩阵，已知  $e_1$ ，便可以准确地求出  $x_i$ 。置  $e_1$  等于零时求得的解  $x_1$ ，就是最小平方意义下的解。

现在我们的任务是要找到能履行 (6-4-2) 的、被称为豪斯贺德变换的特殊反射变换。首先注意到，下式左边的算子无论  $s$  取什么值都是一个反射变换。

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{(a_3-s)^2 + a_4^2 + a_5^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3-s \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & (a_3-s)a_4a_5 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (a_3-s) \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-4-5)$$

下面来选定  $s$ 。若要 (6-4-5) 成立，则  $s$  必须取一特殊值以使下式成立

$$1 = \frac{2}{(a_3-s)^2 + a_4^2 + a_5^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & (a_3-s)a_4a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \quad (6-4-6)$$

或

$$1 = \frac{-2sa_3 + 2(a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)}{s^2 - 2sa_3 + (a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)} \quad (6-4-7)$$

只有当  $s$  由下式给出时, (6-4-7) 才成立

$$s = \pm (a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)^{1/2} \quad (6-4-8)$$

现在我们再来看一下, 为什么 (6-4-5) 中左边的算子能得到 (6-4-2) 的结果。选好向量  $a$  作为 (6-4-2) 的第三列, 经变换后可得右边第三列所需要的零。最后, 还必须看到, 此变换不致于破坏 (6-4-2) 中左边任何已有的零。图6-1是按哥路伯方法解最小平方问题的子程序。豪斯贺德变换也可用于含约束条件的问题。在下面的方程组中

$$\begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix} [X] = \begin{bmatrix} d \\ b \end{bmatrix} \quad (6-4-9)$$

希望求出的解对上面那块 (C) 所含的方程是准确的解, 而对下面那块 (A) 所含的方程, 只是在最小平方的意义下的近似解。令  $y$  为对  $x$  作了若干次豪斯贺德变换的结果, 譬如说,  $y = H_2 H_1 x$ 。然后, 将  $x = H_1 H_2 H_2 H_1 x = H_1 H_2 y$  代入 (6-4-9) 式。选定豪斯贺德变换 ( $H_1, H_2$ ) 使它们右乘 (6-4-9) 矩阵后在矩阵的头两行出现零, 譬如

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (6-4-10)$$

现在我们可以对 (6-4-10) 左乘以若干次豪斯贺德变换, 使 (6-4-10) 成下列形式

```

SUBROUTINE GOLUB (A,X,B,M,N)
C
C A(M,N) ; B(M) GIVEN WITH M>N SOLVES FOR X(N) SUCH THAT
C || B - AX || = MINIMUM
C METHOD OF G.GOLUB, NUMERISCHE MATHEMATIK 7,206-216 (1965)
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (D)
      REAL A(M,N),X(N),B(M),U(50)
C.....DIMENSION U(M)
C.....PERFORM N ORTHOGONAL TRANSFORMATIONS TO A(.,.) TO
C.....UPPER TRIANGULARIZE THE MATRIX
      DO 3010 K=1,N
        DSUM=0.0D0
        DO 1010 I=K,M
          DAJ=A(I,K)
1010 DSUM=DSUM+DAJ**2
          DAI=A(K,K)
          DSIGMA=DSIGN(DSQRT(DSUM),DAI)
          DBI=DSQRT(1.0D0+DAI/DSIGMA)
          DFACT=1.0D0/(DSIGMA*DBI)
          U(K)=DBI
          FACT=DFACT
          KPLUS=K+1
          DO 1020 I=KPLUS,M
1020 U(I)=FACT*A(I,K)
C.....I - UU' IS A SYMMETRIC, ORTHOGONAL MATRIX WHICH WHEN APPLIED
C..... TO A(.,.) WILL ANNIHILATE THE ELEMENTS BELOW THE DIAGONAL K
          DO 2030 J=K,N
c.....APPLY THE ORTHOGONAL TRANSFORMATION
            FACT=0.0
            DO 2010 I=K,M
2010 FACT=FACT+U(I)*A(I,J)
            DO 2020 I=K,M
2020 A(I,J)=A(I,J)-FACT*U(I)
2030 CONTINUE
            FACT=0.0
            DO 2040 I=K,M
2040 FACT=FACT+U(I)*B(I)
            DO 2050 I=K,M
2050 B(I)=B(I)-FACT*U(I)
3010 CONTINUE
C.....BACK SUBSTITUTE TO RECURSIVELY YIELD X(.)
          X(N)=B(N)/A(N,N)
          LIM=N-1
          DO 4020 I=1,LIM
            IROW=N-1
            SUM=0.0
            DO 4010 J=1,I
4010 SUM=SUM+X(N-J+1)*A(IROW,N-J+1)
4020 X(IROW)=(B(IROW)-SUM)/A(IROW,IROW)
          RETURN
      END

```

图 6-1

最小二乘法拟合子程序。要注意，此程序对方阵不适用。要求  $M > N$ 。



$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ a & a & a & a \\ a & a & 0 & a \\ a & a & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (6-4-11)$$

由于对 (6-4-10) 或 (6-4-11) 的上面两个方程要求是准确的解, 所以  $y_1$  与  $y_2$  被唯一地确定了。它们不能再作调整而使 (6-4-11) 下面的三方程中的误差达到最小。同样, 上面两个方程对  $y_3$  与  $y_4$  没有约束作用, 所以可对  $y_3$  和  $y_4$  作适当调整, 使 (6-4-11) 中下面三个方程的误差达到最小。 $y_3$  与  $y_4$  无论怎样调整, 不能改变最后一个方程的误差, 所以, 在确定  $y_3$  与  $y_4$  时, 可以忽略最后一个方程。适当选择  $y_3$  与  $y_4$ , 可使第三与第四个方程中的误差为零。由此得到的结果肯定是最小平方误差。求得了  $y$ , 由  $x = H_1 H_2 y$  即可求得  $x$ 。

### 6-5 模型范数的选择

近年来, 地球物理数据模型中, 流行的一种观点, 是把地球的物理特性看成是连续变化的。因此, 未知数的个数是无穷多个, 但我们能观测的点数却是有限的。从而要在计算机上对一个高欠定联立方程组求近似解。为了获得唯一的答案, 需对某一积分取极值。实际上, 对平方和取极小的做法就是产生一个平滑解。对方程组做最小平方拟合, 一般的数学形式为式中上块  $A$  表示欠定约束方程, 其数据向量为  $d$ , 未知

$$\begin{bmatrix} A \\ \diagdown \end{bmatrix} x \approx \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-5-1)$$

数含在  $x$  向量中; 下块是带状矩阵 (所有非零元素集中在对

角线两边)，说明  $x$  经某种过滤后结果为零。这种滤波器通常是象一阶差分算子那样的滤波器。

选择滤波器是件相当主观的事情，一般是根据想得出什么样的解（输出）进行选择。然而，滤波器的输出对主观选择的权和滤波器来讲，是个相当敏感的函数；这就使得选择滤波器成了一门艺术，要凭经验和好的判断力才能选择恰当。通用的反演理论对地球物理的具体情况、资料的特性都不大适用。反演理论象数理统计一样，它能给我们一些启示，但不能直接依靠它。

坐标系不变性概念是反演理论中一个有用的概念。就是说，在研究地球电导率问题时，无论采用下述办法中的那一种，得到的答案应该相同：以在地球的足够稠密的网格上每个格点的电导率作为参数；或者以每个格点上的电阻率作为参数；或者以按完备的基本函数系作某种展开的展开式的系数作为地球的参数。若在某种展开中置高阶系数为零，而只对低阶系数拟合，这种做法显然不能保持坐标不变性。在多项式展开中，（展开）点取的不同，系数也就不同。基本函数系取得不同，结果也各不相同。当然，这对于在数据反演中使用坐标系统不变性概念不关紧要。但是，如果不是这样，则应当注意坐标系统的改变，对所得解的影响可能达到多大程度。

现在考虑某些具有坐标系不变性的反演步骤。我们仅限于讨论可以把正密度函数  $P$  看作是单位体积内的能量或消耗的这一类物理问题。以  $\bar{P}$  表示地球的欠测模型中这个电源的值（的分布）， $\bar{P}$  是欠测模型中的空间函数。所谓欠测模型（default model）是指我们想找到的、但我们又无法测量的那种模型。这种模型中，其物质性质常常是空间的常值函

数。现在我们需要一些我们称之为模型范数的函数。这些函数应具有性质：对所有（正的） $p$  与  $\bar{p}$  取正值，且在  $p = \bar{p}$  取极小值。图 6-2 中绘出的一些例子是

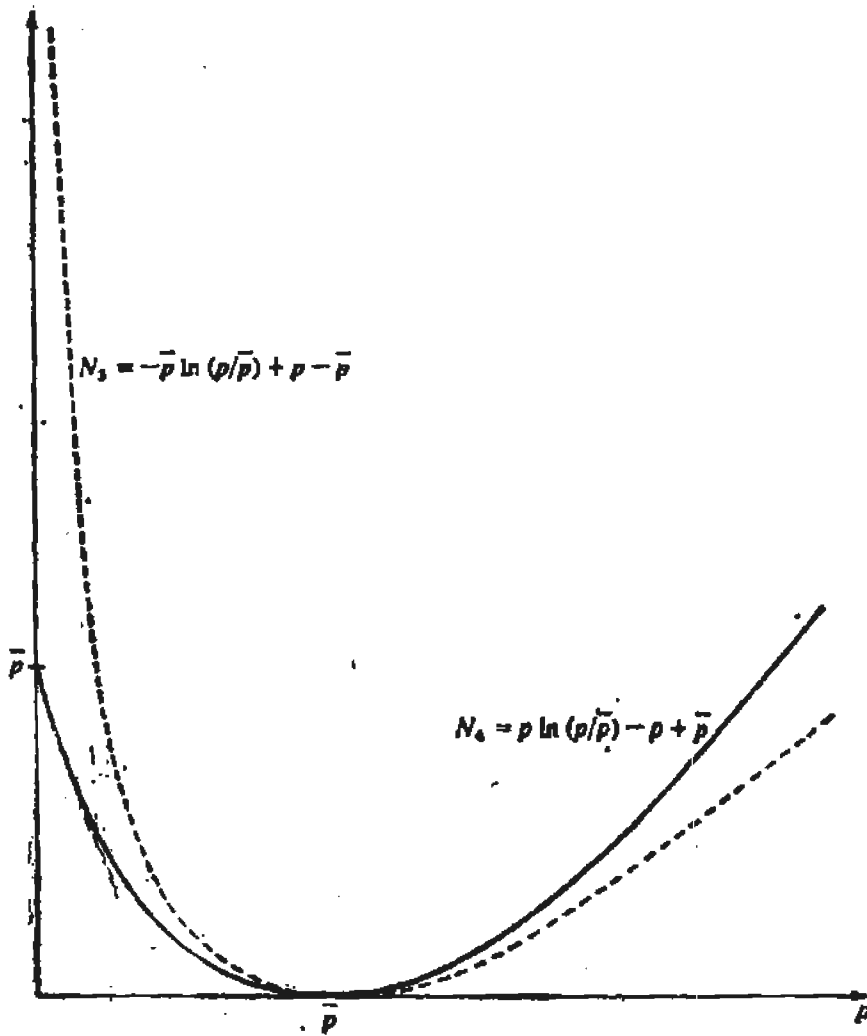


图 6-2

这两个函数当  $p$  趋近于  $\bar{p}$  时，达到极小值。

$$N_1(p, \bar{p}) = |p - \bar{p}|$$

$$N_2(p, \bar{p}) = \frac{(p - \bar{p})^2}{\bar{p}}$$

$$N_3(p, \bar{p}) = -\bar{p} \ln\left(\frac{p}{\bar{p}}\right) + p - \bar{p}$$

$$N_4(p, \bar{p}) = p \ln\left(\frac{p}{\bar{p}}\right) - p + \bar{p}$$

现在用空间函数  $x$  表示可调整的地球性质，要求按照约束条件（从模型中得出的一些观测值）选择  $x$ ，使一个模型范数在某体积范围内的体积分取极小值。有时我们可在  $j = 1, 2, 3, \dots, n_s$  源位置上获得观测值。要对每个源（位置）的欠测电源的分布  $\bar{p}_j$  都进行计算。因此，为了拟合所有这些数据值，应对几个体积分的和取极小

$$\min_x \sum_{j=1}^{n_s} \int N(p_j, \bar{p}_j) dV$$

可以看出，前述所有的模型范数函数都是一阶齐次的，即当  $a > 0$  时， $N(ap, a\bar{p}) = aN(p, \bar{p})$ ，这一点保证了  $N$  为体积密度。没有这个性质，就会遇到这样的困难：当网格变动时， $N_k(p, \bar{p})$  在一组子体积  $\Delta V_k$  范围内求的和会随之而改变。按体积分坐标变换的通常规则，知其具有坐标系不变性。

现在我们举一个滤波理论中的例子，它与极大熵谱估计有关。设已知输入谱为  $R(Z)$ ，要找一有限长度的滤波器（譬如说， $X(Z) = x_0 + x_1Z + x_2Z^2$ ），令滤波器的谱为  $S(Z) = \overline{X}(1/Z) X(Z)$ 。要求它的输出在下述意义下尽可能地近似于白噪化，即：挑选谱  $S$  使范数  $N_s$  的积分达到极小。此时， $\bar{p} = 1$ ， $p = R(Z)S(Z)$ ，因此，问题归结为确定  $S$ ，使

$$\min = \int (-\ln RS + RS) d\omega$$

令上式中积分对  $\bar{x}_k$  的微商等于零, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int \left( -\frac{1}{S} + R \right) \frac{\partial S}{\partial \bar{x}_k} d\omega \\ &= \int \left( -\frac{1}{S} + R \right) Z^{-k} X(Z) d\omega \\ &= \int Z^{-k} \left[ -\frac{1}{\bar{X}(1/Z)} + R(Z) X(Z) \right] d\omega \end{aligned}$$

由于最小相位函数可以表示任何一个谱, 可将  $\bar{X}(1/Z)^{-1}$  展开为  $(b_0 + b_1/Z + b_2/Z^2 + \dots)$  ①

$$0 = \int Z^{-k} \left[ -\left( b_0 + \frac{b_1}{Z} + \frac{b_2}{Z^2} + \dots \right) + RX \right] d\omega$$

此积分正好等于其被积函数中  $Z^0$  的系数。假定此滤波器当  $k \geq 3$  时,  $x_k = 0$ 。分别令  $k = 0, 1, 2$ , 便得大家熟悉的陶布里兹方程组如下

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_{-1} & r_{-2} \\ r_1 & r_0 & r_{-1} \\ r_2 & r_1 & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 6-6 健全的拟合

中位数和均值是两种统计平均。在正常情况下, 它们相差不很大。现时, 物理工作者都喜欢使用均值, 以至对中位

① 原文为:  $(\bar{b}_0 + \bar{b}_1/Z + \bar{b}_2/Z^2 + \dots)$

$$X\left(\frac{1}{Z}\right)^{-1} = \int Z^{-k} \left[ -\left( b_0 + \frac{b_1}{Z} + \frac{b_2}{Z^2} + \dots \right) + RX \right] d\omega$$

数具有抗数据失常的能力缺乏认识。举例来说，设想一项耗费大、一天仅能获得一个数据的试验。第一天得的结果是2.17，第二天是2.14，第三天即最后一天为1638.03。三天的结果，均值为547.78，但中位数却为2.17。显然可怀疑第三天的数据失常了，并可认为其中位数比较可靠。统计学家称中位数的这种抗失常性为中位数的“健全性”。本节的目的就是要搞清楚，有多少类地球物理数据拟合，可以使之成为健全的。其中，我们将看到，以前用过的使误差平方和达到极小的方法解超定线性联立方程，如果改用对误差的绝对值的和取极小值，那么便可使全部计算健全起来。当然最小二乘法的算法，比对绝对误差的和取极小值方法，所能解的问题的范围稍宽一些，但计算要费一些。对于正误差与负误差可以分别加上不同的权因子。这种处理方法称为非对称线性规范。不等式是非对称规范的一种特殊情况，毫不奇怪，所有线性规划问题都属于非对称规范问题，而非对称规范问题的解法又类似于线性规划问题的解法。

首先，说明一下均值和中位数怎么与平方值和绝对值有联系呢？令  $x_i$  为一组任意数。求  $m_2$  与  $x_i$  之差的平方和（称为  $L_2$  范数）的极小值

$$m_2: \quad \min \sum_{i=1}^N (m_2 - x_i)^2 \quad (6-6-1)$$

要求它的极小值很简单，只要求出 (6-6-1) 关于  $m_2$  的偏微商，并令其等于零，得

$$0 = \sum_{i=1}^N 2(m_2 - x_i)$$

由此即得

$$m_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (6-6-2)$$

显然，此  $m_2$  就是通常的平均值。下面，再来定义  $L_1$  范数  $m_1$ ，即与  $x_i$  的绝对值之和能达到极小的  $m_1$

$$m_1: \quad \min \sum_{i=1}^N |m_1 - x_i| \quad (6-6-3)$$

为了求其极小值，令 (6-6-3) 对  $m_1$  的偏微商等于零

$$0 = \sum_{i=1}^N \text{sgn}(m_1 - x_i) \quad (6-6-4)$$

式中，函数  $\text{sgn}$  当变元为正时等于 +1，当变元为负时等于 -1，而当变元为零时取不定值。方程 (6-6-4) 表明：应选择  $m_1$ ，使得在  $N$  个  $x_i$  中， $m_1$  大于其中  $N/2$  个  $x_i$ ，而小于另外  $N/2$  个  $x_i$ ；如果在中间还剩一个  $x_i$ ，那么  $m_1$  就该等于这个  $x_i$ 。这就是说， $m_1$  应取  $x_i$  的中位数〔当  $N$  为偶数时，(6-6-3) 仅要求  $m_1$  取在  $x_i$  中的两个中间值之间就可以了〕。

求均值的计算费用，与  $N$ （即点数）成比例。对于排好了大小顺序的  $N$  个数，计算其均值的费用为  $N \ln N$ 〔22〕，但求中位数则不用排顺序。霍尔 (Hoare) 〔23〕提出的找中位数的算法约需要  $3N$  次运算。我们将根据霍尔的算法提出求加权中位数的算法。加权中位数类似于加权和。通常，如前例中都取 2.17 作为三个数据 (2.14, 2.17, 1638.03) 的中位数，这相当于我们默认了权因子为 (1, 1, 1)。如果权因子

取为 (3,1,1), 那就相当于有了五个数据 2.14, 2.14, 2.14, 2.17, 1638.03, 其中位数就会是 2.14。用公式表示, 加权中位数可以由下式取极小求得

$$m_{12} \quad \min \sum |w_i| |m_1 - x_i| \quad (6-6-5)$$

显然, 如果权因子均为 1, 这就回到了 (6-6-3)。而当某权因子不是 1, 譬如说取为 3, 这就好象式中含的这一项重复出现了三次。图 6-3 描述了 (6-6-5) 的一种简单情况。从图 6-3 可以看 中位数总是等于  $x_i$  中的一个数, 甚至当权

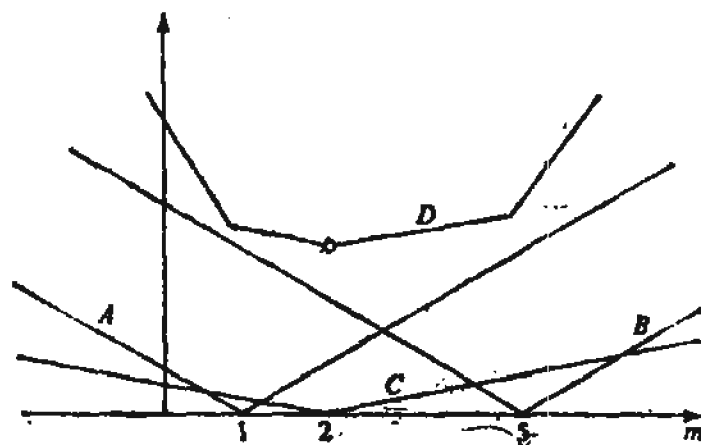


图 6-3

加权的绝对值范数的和。标有 A 的函数为  $\cdot 5|m-1|$ , B 为  $\cdot 5|m-5|$ , C 为  $\cdot 1|m-2|$ , 而 D 为 A、B、C 之和。此和 D 于  $m=2$  处达到极小, 而该点 ( $m=2$ ) 恰好是  $C=0=\cdot 1|m-2|$  的解。

因子不是整数时, 也是如此。假如权因子都是 1, 并且  $x_i$  的个数为偶数, 则其误差范数在  $x_i$  的两中间值之间滑动, 不起变化。因此,  $x_i$  的两中间值之间的任何数都可定为中位数。

于 (6-6-5) 中把  $|w_i|$  放到另一个绝对值符号里面去, 得

$$m_{12} \quad \min \sum_i |w_i| |m - |w_i| x_i| = \min \sum_i |w_i m - w_i x_i| \quad (6-6-6)$$



我们现在将统计学上惯用的记号改写为联立方程和线性规划的通用记号。令

$$a_{1i} = w_i \quad b_{1i} = w_i x_i \quad x_i = m \quad (6-6-7a, b, c)$$

这样, (6-6-6) 式变为

$$x_i \quad \min \sum_i |a_{1i} x - b_{1i}| \quad (6-6-7)$$

按照 (6-6-7) 的形式, 问题变为: 通过求  $L_1$  范数的极小, 解一元 (关于  $x$ ) 的超定方程

$$ax \cong b \quad (6-6-8)$$

实际上, 这就是解加权中位数问题。如果对  $L_2$  范数 (最小平方) 取极小值来解 (6-6-8), 则  $x$  将会是加权平均值  $x = (a \cdot b) / (a \cdot a)$ 。

我们现在来研究求 (6-6-5) 极小值的方法。其实质就是霍尔的算法。采用试探解法, 我们从方程组 (6-6-8) 随便选出一个方程, 在此方程中取等号, 解出  $x_k$  (该方程的精确解)。这个方程称为基本方程, 以  $a_k x_k = b_k$  表示。将  $x_k$  代入 (6-6-8), 则有的方程误差为正, 有的误差为负, 有的为零。如果此  $x_k$  已很合适, 那么就可发现, 正误差的份量与负误差的份量应大致平衡。如果正误差组与负误差组不平衡, 就要从较强的那一组中再选取一个试探基本方程。如此做下去。这时, 我们无须再去研究原来较弱的那组中误差的变化, 因为此时较弱的那一组中误差的符号保持不变。这种情况可以从图 6-3 上的几何图形看出。我们总是在  $D$  上从上往下寻找, 一旦发现从现有的点开始上升时, 那就不必再往上找了。因此, 受到检验的组的范围缩小得很快。图 6-4 是作这些运算的子程序。

```

SUBROUTINE SKEWER(ND,N,W,F,GU,GD,SMALL,K,T,ML,MH)
C SOLVE RANK 1 OVERDETERMINED EQUATIONS WITH SKEW NORM
C INPUTS- N,W,F,GU,GD,SMALL,K. OUTPUTS- K,T,ML,MH.
C FIND T TO MINIMIZE
C N
C LS = SUM SKERNORM(K,F(K)-W(K)*T)
C K=1
C WHERE ( GU(K)*(ER-SMALL) IF ER.GT.+SMALL GU.GT.0
C SKERNORM(K,ER) = ( GD(K)*(ER+SMALL) IF ER.LT.-SMALL GD.LT.0
C ( 0. IF ABS(ER).LE.SMALL.GE.0.
C GU,GD,W,AND F ARE REFERENCED INDIRECTLY AS W(K(I)),I=1,N ETC
C MINIMA WILL BE AT EQUATIONS K(ML),K(ML+1),...K(MH).
DIMENSION W(ND),F(ND),K(ND),GU(ND),GD(ND)
DIMENSION G(1000)
LOW=1
LARGE=N
ML=N
MH=1
GN=0.
GP=0.
DO 50 ITRY=1,N
L=K(LOW+MOD((LARGE-LOW)/3+ITRY,LARGE-LOW+1))
IF(ABS(W(L)).EQ.0.) GO TO 50
T=F(L)/(W(L))
F(L)=W(L)*T
DO 10 I=LOW,LARGE
L=K(I)
ER=F(L)-W(L)*T
G(L)=0.
IF(ER.GT.SMALL) G(L)=-W(L)*GU(L)
10 IF(ER.LT.-SMALL)G(L)=-W(L)*GD(L)
CALL SPLIT(LOW,LARGE,K,G,MLT,MHT)
GNT=GN
DO 20 I=LOW,MLT
20 GNT=GNT+G(K(I))
GPT=GP
DO 30 I=MHT,LARGE
30 GPT=GPT+G(K(I))
GPLX=0.
GMIX=0.
DO 40 I=MLT,MHT
L=K(I)
IF(W(L).LT.0.)GPLX=GPLX-W(L)*GU(L)
IF(W(L).GT.0.)GPLX=GPLX-W(L)*GD(L)
IF(W(L).GT.0.)GMIX=GMIX-W(L)*GU(L)
40 IF(W(L).LT.0.)GMIX=GMIX-W(L)*GD(L)
GRAD=GNT+GPT
IF((GRAD+GPLX)*(GRAD+GMIX).LT.0.) GO TO 60
IF(GRAD.GE.0.)LOW=MHT+1
IF(GRAD.LE.0.)LARGE=MLT-1
IF(LOW.GT.LARGE) GO TO 60
IF(GRAD.GE.0.)GN=GNT+GMIX
IF(GRAD.LE.0.)GP=GPT+GPLX
IF((GRAD+GPLX).EQ.0.)ML=MLT
IF((GRAD+GMIX).EQ.0.)MH=MHT
50 CONTINUE

```

```

60  ML=MINO(ML,MLT)
    MH=MAXO(MH,MHT)
    RETURN
    END

    SUBROUTINE SPLIT(LOW,LARGE,K,G,ML,MH)
C   GIVEN G(K(I)),I=LOW,LARGE
C   THEN REARRANGE K(I),I=LOW,LARGE AND FIND ML,MH SO THAT
C   (G(K(I)),I=LOW,(ML-1)) .LT. 0 AND
C   (G(K(I)),I=ML,MH)=0. AND
C   (G(K(I)),I=(MH+1),LARGE) .GT. 0.
    DIMENSION K(LARGE),G(41)
    ML=LOW
    MH=LARGE
10  ML=ML-1
20  ML=ML+1
    IF(G(K(ML)))20,30,30
30  MH=MH+1
40  MH=MH-1
    IF(G(K(MH)))50,50,40
50  KEEP=K(MH)
    K(MH)=K(ML)
    K(ML)=KEEP
    IF(G(K(ML)).NE.G(K(MH)))GO TO 10
    DO 60 I=ML,MH
    II=I
    IF(G(K(I)).NE.0.0) GO TO 70
60  CONTINUE
    RETURN
70  KEEP=K(MH)
    K(MH)=K(II)
    K(II)=KEEP
    GO TO 30
    END

```

图 6-4

计算加权中位数的子程序。这个程序较为复杂，因为它考虑到了当加权因子为零时，要做一些校正工作；又因为它要指出，那些方程是对最后求得的极小点完全满足的方程（有时不只一个）。

下面使问题再复杂一点，可以考虑两个未知数的情形。显然，此时 (6-6-8) 的推广形式是

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_k & c_k \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6-6-9)$$

我们假定读者已熟悉用最小二乘法求 (6-6-9) 的解, 就不再赘述了。用对误差的绝对值和求极小值的方法求解 (6-6-9), 和上述类似。先定义误差为

$$E = \sum_{k=1}^N |b_k - a_k x - c_k y| \quad (6-6-10)$$

然后令该误差对  $x$  与  $y$  的微商分别等于零, 即

$$0 = \frac{\partial E}{\partial x} = \sum_{k=1}^N -a_k \operatorname{sgn}(b_k - a_k x - c_k y) \quad (6-6-11a)$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial y} = \sum_{k=1}^N -c_k \operatorname{sgn}(b_k - a_k x - c_k y) \quad (6-6-11b)$$

下面分别进行讨论。如果  $\operatorname{sgn}$  函数总是取  $+1$  或  $-1$  值, 则 (6-6-11a) 意味着  $a_k$  要分成相互抵销的两堆。很明显, 多数 (实际上是绝大多数) 数集都不可能分得这样均衡 (例如, 当  $a_i$  中有一个不是整数, 其余的均为整数)。而当 (6-6-9) 中至少有一个方程能准确地求解时, 前述困难就不复存在了。因为此时至少有一项  $\operatorname{sgn}$  取不定值。想到图6-3所述, 对于一个未知数的情况, 其极小一般正是出现在一阶微商不连续的拐角上, 对两个未知数的情形也就比较好理解。类似的讨论对 (6-6-11b) 也适用。通常是对于  $N$  个方程和  $M$  个未知数 ( $N > M$ ) 的情形, 在这  $N$  个方程中, 正好取  $M$  个求它们的准确解 使这  $M$  个方程的误差为零。线性规划中通常把从  $N$  个方程中提出的由  $M$  个方程组成的非奇异方程组称为基本方程组。若通过这样一组由  $M$  个方程组成的方程组求出的解, 能使误差达到极小, 则此方程组称为最优基本方程组。

虽然线性规划是二十世纪发展起来的, 但它的基本思想似乎在十八世纪拉普拉斯以前就已为人们所熟知了<sup>[24]</sup>。

这方面进一步的研究和在地球物理中的许多应用，可参考文献〔25〕。

下面再介绍一种简单而有效的关于递降多维误差面的方法。过  $x_0$  的一直线上的点  $x$  的位置可以用标量参数  $t$  表示。该直线的方向可用一有  $M$  个分量的向量  $g$  来表示。因而直线上任意一点  $x$  可以表示为

$$x = x_0 + gt \quad (6-6-12)$$

将 (6-6-12) 代入下列超定方程组

$$Ax \cong b \quad (6-6-13)$$

得

$$A(x_0 + gt) \cong b \quad (6-6-14a)$$

$$(Ag)t \cong b - Ax_0 \quad (6-6-14b)$$

规定  $w$  与  $e$  为

$$w = Ag \quad (6-6-15a)$$

$$e = b - Ax_0 \quad (6-6-15b)$$

(6-6-14b) 变为

$$wt \cong e \quad (6-6-16)$$

对其绝对误差的和取极小值求出的 (6-6-16) 的解，也能在 (6-6-14a) 中沿直线使误差达到极小。但 (6-6-16) 正是前面讨论过的加权中位数问题。回想一下前面讲过的解法，使 (6-6-16) 绝对误差达到极小的解  $t$ ，正好是 (6-6-16) 中某个方程的精确解。譬如说此方程为第  $k$  个方程，有  $t = e_k/w_k$ 。 $t$  的这个值，也满足 (6-6-13) 中的第  $k$  个方程。现在可以把第  $k$  个方程作为基本方程。往下还将看到，在下次重复中调整  $t$  时，要适当选取向量  $g$ ，使  $t$  仍然满足第  $k$  个方程（仍留在第  $k$  个超平面上）。

现在我们需要一个基本方程组。这是个包含  $M$  个方程

的方程组，暂且认为此方程组能准确地满足。然后，用加权中位数解法，把新的方程引进基本方程组时，就将老的方程从基本方程组中除掉。此算法的技巧仅仅在于除掉那些时间待得长的方程。其基本方程组记为

$$A'x = d' \quad (6-6-17)$$

$A'$  为方阵。下面需要用到  $A'$  的逆矩阵，以  $B$  表示。现在假定我们决定从基本矩阵  $A'$  中除掉第  $P$  个方程。那么  $g$  可选为  $B$  的第  $P$  列。为什么要这样选定  $g$  呢？注意到，由于  $A'B = I$ ，这时  $M$  维向量  $A'g$  是单位矩阵中的第  $P$  个列向量。因此，在  $N$  维向量  $w = Ag$  中，有一个分量等于  $+1$ ，有  $M-1$  个分量等于  $0$ ，而余下的  $N-M$  个分量是未定的元素。如果 (6-6-13) 或 (6-6-16) 中，第  $k$  个方程仍保留在基本方程组 (6-6-17) 内，则  $Ag_t = d - Ax$  中第  $k$  个方程呈形式

$$\text{零 } t = \text{零} \quad (6-6-18)$$

左边的零是单位矩阵中的一个元素，而右边的零是由于说过第  $k$  个方程是准确地满足的。显然，现在我们可以按我们的意图去调整  $t$ ，以便达到一个新的局部的极小，而第  $k$  个方程总是准确地满足。还有一个下列形式的方程

$$1t = \text{零} \quad (6-6-19)$$

仅当  $t$  为零时，它才满足。从几何上讲，这意味着，我们想要求出一个极小值，而这个方程式不满足，所以我们跳离这个超平面。这个方程，就是要离开基本方程组的那一个。当然，如果  $t$  取为零，它又再次进入基本方程组。往下就是重复这些步骤；重复了  $M$  次之后，因待的时间长而被撵出基本方程组的方程，马上又会由于  $t=0$  再次出现在基本方程组中。这说明基本方程组已不能再改善了，该方程组已是最优基本方程组了，从而可获得最终解。

## 第7章 最小二乘法在波形上的应用

用微积分的方法，我们会求曲线上极值“点”的坐标。在变分学里，我们知道如何求极值“函数”。在实践中，连续问题可以用一个网格作近似化为离散问题，而两者的差别不显著。这样，变分问题的计算就要出现矩阵，矩阵虽然很大，但由于这些矩阵常有规则的形式，从而减轻了计算的难度。本章中，我们讨论最小二乘法在波形上的应用及各组波形之间的关系的例子。这些例子都将导致一个满秩的矩阵，叫做陶布里兹矩阵。对这种矩阵，有专门的求解方法。

### 7-1 预测及滤波器的形成

用  $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$  表示一个数据子波。我们要设计一个滤波器  $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ 。滤波是这样定义的：当数据  $\mathbf{b}$  进入滤波器  $\mathbf{f}$  时，根据下面的矩阵乘法产生输出子波  $\mathbf{c}$

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \\ b_2 & b_1 & b_0 & \\ \vdots & b_2 & b_1 & \ddots \\ b_n & \vdots & b_2 & \\ 0 & b_n & \vdots & \\ \vdots & 0 & & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \quad (7-1-1)$$

这种运算常称为“完全的瞬时褶积”。这和多项式乘法中求等幂项的系数是一样的。

现在我们引入另一个子波  $d$ ，它有与  $c$  同样个数的分量。我们称  $d$  为这个滤波器的期望输出。 $c$  是实际输出。实际输出  $c$  是输入  $b$  和滤波器  $f$  的一个函数。现在的问题是要确定  $f$ ，使  $c$  和  $d$  很相近。确切地说，我们要选择  $f$ ，使差分矢量  $c-d$  具有最小平方的长度（在  $n+m+1$  维空间中）。换句话说，我们使用最小二乘法去求解超定方程

$$\begin{bmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \\ b_2 & b_1 & b_0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ b_n & \vdots & b_2 & \\ 0 & b_n & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n+m} \end{bmatrix} \quad (7-1-2)$$

使用前一章的“快速”方法，我们只要以其转置矩阵来左乘一下 (7-1-2)，便得到形为

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ r_1 & r_0 & r_1 & & \\ r_2 & r_1 & r_0 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \\ r_m & & & & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} \quad (7-1-3)$$

的一个陶布里兹矩阵。其中， $r_k$  是输入  $x_k$ （译注：这里  $x_k$  即  $b_k$ ）的自相关， $g_k$  是输入  $x_k$  与期望输出  $d_k$  的互相关。有关计算方法，请看第 7 章第 5 节。

本节的公式也可以用于预测问题：从一个时间序列的过去，预测本序列的未来。例如， $f_1, f_2, \dots, f_m$  是从  $x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-m+1}$  预测  $x_{t+10}$  的一个预测滤波器，如果我们要用最小二乘法解下列方程



$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_0 & x_{-1} & \cdots & x_{-m+1} \\ x_1 & x_0 & & x_{-m+2} \\ x_2 & x_1 & & \vdots \\ x_3 & x_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (7-1-4)$$

那么，只要有数据，(7-1-4)中的矩阵就可以继续向下扩大。应用中，(7-1-4)中 $t$ 的范围可能超出 $t$ 的过去值。于是，在解出滤波器 $f$ 的方程之后，希望时间序列的性质是这样的，即 $f$ 能够用来预测时间序列的、还未曾在定义 $f$ 的方程中出现过的将来值。

如果(7-1-4)矩阵的高度比它的宽度大得多，就需要有区别地处理两端数据的影响。若改用(7-1-5)的最小平

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 \\ x_2 & x_1 & \\ x_3 & x_2 & \\ \vdots & \vdots & \\ \text{都是0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \quad (7-1-5)$$

方正交方程具有陶布里兹矩阵，而对于(7-1-4)，则得不到陶布里兹矩阵。读者知道，陶布里兹矩阵在理论上和计算上都有许多优点。

特别有意思的是用下列方程设计的滤波器

这种滤波器叫做“单位跨度的预测误差滤波器”，因为 $a_k$ 在 $(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$ 上运算，并试图取消 $x_t$ ，于是， $a_k$ 在 $(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$ 上的运算给出的是根据 $(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$ 作出的 $x_t$ 的负的最佳预测。(7-1-6)蕴涵的正

交方程是 (7-1-7)

$$\begin{bmatrix} x_0 & \text{都是0} \\ x_1 & x_0 \\ x_2 & x_1 & x_0 \\ x_3 & x_2 & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{都是0} & \cdot & \cdot & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-1-6)$$

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \cdots \\ r_1 & r_0 & r_1 & \\ r_2 & r_1 & r_0 & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-1-7)$$

要注意到，一个预测误差滤波器的计算仅依赖于时间序列的自相关，而不依赖于时间序列本身。我们已经知道〔从 (3-3-3)〕，这些方程的解是一个最小相位多项式的系数。

当 (7-1-3) 的右边取任意形式时，陶布里兹方程的解，一般来说，不是最小相位。不过，为使计算加快，来文森递推方法仍可以应用。在第7-5节，讲了多道来文森递推方法。

### 练习

1. 对子波 (1, 2) 求三项零延迟反子波。将其误差与 (2, 1) 的误差做比较。比较其波形。对最小平方反滤波器误差的进一步讨论见参考文献26。结论是：当滤波器长度为无限时，在下面两种情况下，平方误差的总和为零：

(a) 当并且仅当求逆的子波是最小相位时，有零延迟

反子波。

(b) 如果求逆的子波不是最小相位，只有假定在输出被延迟时，误差才成为零，即， $d = (\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ ，对 (1, 2) 计算三项延迟的反子波，即试以  $d = (0, 1, 0, 0)$  或  $d = (0, 0, 1, 0)$  进行计算。

2. 在一个深井中，测压仪记录到上行地震波。 $t_0$  时间之后，又记录到同一的相反符号的下行波。请确定长度为  $m$  的，延迟的及非延迟的最小平方滤波器，以消除双重脉冲（应能猜出，解此类大矩阵，可试用  $f_k = \alpha + \beta k$  式的滤波器，其中  $\alpha$  和  $\beta$  都是标量）。

问：作为滤波器长度的一个函数，误差是什么？

3. 令  $b_t = (\dots, 1, 1, -2, 1, 1 - 2, \dots)$ 。用最小平方法求预测  $b_t$  的最佳的单项滤波器，仅使用  $b_{t-1}$  预测  $b_t$ 。用  $b_{t-1}$  和  $b_{t-2}$  求最佳双项滤波器来预测  $b_t$ 。同样，求最佳三项滤波器。在每一种情况中，作为时间的函数，误差是什么？

## 7-2 伯格谱估计<sup>[27]</sup>

测不准原理指出，如果一个时间函数在时间间隔  $\Delta t$  中包含它的大部分能量时，则其付里叶变换在带宽  $\Delta f \geq 1/\Delta t$  中包含大部分能量。这和下面所说的是不同的：如果我们有长度  $\Delta t$  的一个平稳时间序列，我们能得到的最佳频率分辨率将是  $\Delta f = 1/\Delta t$ 。其差别在于：一个假定函数是给定在区间  $\Delta t$  之内，而在区间  $\Delta t$  外边该函数为零；另一个假定这函数在给定的区间外边“以明显的方式”延续着。如果数据采样能够在它所给定的区间之外以“明显的方式”延续了一

段，那么，频率分辨率  $\Delta f$  可能会比  $1/\Delta t$  小得多。较好的分辨率依赖于在采样两端外边的数据的可预测性。如果我们有一段平稳序列，比该平稳序列的自相关较短，则伯格的谱估计方法在根本上就比任何截尾的付里叶变换方法都好。在物理问题中有这样的情况发生：当人们和共鸣打交道时，与观察时间相比，它的衰减时间是长的；或当人们观察一空间函数时，空间里每一个点各表示一个仪器。

假如谱  $R(Z)$  以  $\bar{X}(1/Z)X(Z)$  来做近似，其中  $X(Z)$  是一个多项式，是由  $N+1$  个已知的数据点构成的，则  $R(Z)$  的系数可由

$$r_k = \sum_{j=0}^{N-k} \bar{x}_{j+k} x_j \quad (7-2-1)$$

来计算。注意， $r_0$  是从  $N+1$  项计算出来的， $r_1$  是从  $N$  项计算出来的，等等。如果  $N$  不够大，就会有一种不利的偏置影响。若  $r_k$  改用下面的公式计算，便可消除这种偏置

$$r_k = \frac{1}{N-k+1} \sum_{j=0}^{N-k} \bar{x}_{j+k} x_j \quad (7-2-2)$$

但使用 (7-2-2) 也有困难，数据采样能容易地得到，可是  $r_k$  并不是确切的自相关函数。例如，谱在所有的频率上都不是正值，其陶布里兹方程的解可能求不出来，等等。

伯格的方法可避免 (7-2-1) 的两端数据影响问题及因 (7-2-2) 而得不到结果的可能性。代替从数据直接估计自相关  $r_k$  的方法，伯格是从数据直接估计一个最小相位预测误差滤波器。预测误差滤波器的输出为一白谱（不这样，色谱也能用来改进预测）。由于输出的谱是输入谱乘上滤波

器的谱，所以，输入的谱可以估计为预测误差滤波器谱的倒数。正如我们所知道的，狭窄的谱峰由分母来表示远比用分子表示容易得多。

数据的已知段用  $x_0, x_1, \dots, x_n$  来表示。则时间序列  $x_t$  的双项预测误差滤波器 (1,  $a$ ) 由下式取  $a$  使其达到极小而得到

$$E(a) = \sum_{t=1}^N \left| x_t + ax_{t-1} \right|^2 \quad (7-2-3)$$

但是有些例子表明，有的时间序列〔如 (1, 2)〕，使  $|a|$  大于 1。这是不能接受的，因为这时预测误差滤波器不是最小相位，谱也不是正值（译者注：原文如此）。请回忆前一节定义的一个预测误差滤波器，只依赖于数据的自相关，而不是数据本身。这就意味着同一个滤波器可从一个时间序列和一个（复共轭）反时的时间序列两者计算得出。并提示我们，顺时（向前）预测 (7-2-3) 的误差被逆时（向后）预测的误差增大了，即

$$E(a) = \sum_{t=1}^N \left| x_t + ax_{t-1} \right|^2 + \left| \overline{x_{t-1}} + a \overline{x_t} \right|^2 \quad (7-2-4)$$

我们以后还要证实，为使 (7-2-4) 达到极小，总是导致  $|a|$  小于 1。同  $a$  这个值伴随而来的功率谱估计是  $R = 1 / [(1 + \overline{a/Z})(1 + aZ)]$ 。如果在  $a$  变得十分靠近单位圆时， $\Delta f$  的值可能是很小的。

对于多项滤波器，(7-2-4) 的自然推广似乎应是取  $a_1, a_2$  使下式达到极小

$$E(a_1, a_2) = \sum_{t=2}^N \left| x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} \right|^2 + \left| \overline{x_{t-2}} + a_1 \overline{x_{t-1}} + a_2 \overline{x_t} \right|^2 \quad (7-2-5)$$

可惜的是，伯格发现所计算的滤波器  $A(Z) = 1 + a_1 Z + a_2 Z^2$  的时间序列并不是最小相位。如果  $A(Z)$  不是最小相位，那么， $R = 1/[A(1/Z)A(Z)]$  就不是一个令人满意的谱估计，因为  $R(Z)$  要在单位圆上求值，而  $1/A(Z)$  在单位圆上又不收敛（译者注：原文如此）。

伯格曾注意到，来文森递推法总是给出最小相位滤波器。在来文森递推法中，一个3阶滤波器是从2阶滤波器用

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$$

得到的。这样，伯格决定，代替在 (7-2-5) 中最小平方方法测定  $a_1$  和  $a_2$  的方法，先从 (7-2-4) 中求出  $a$ ，再做一个最小平方问题以解出  $c$ 。这样做，是为了确保得出的  $|c|$  小于1。这就保证了  $A(Z) = 1 + a_1 Z + a_2 Z^2$  是最小相位。所以，伯格建议把 (7-2-5) 改写为

$$E(c) = \sum_{t=2}^N \left| x_t + a x_{t-1} - c (\overline{a x_{t-1}} + x_{t-2}) \right|^2 + \left| \overline{x_{t-2}} + a \overline{x_{t-1}} - c (\overline{a x_{t-1}} + \overline{x_t}) \right|^2 \quad (7-2-6)$$

这时的 (7-2-6)，作为顺时预测误差与逆时预测误差之和，是求  $c$  使之达到极小（在下一章，我们将看到，可以很恰当地称  $c$  为反射系数）。在 (7-2-4) 求极值过程中， $a$

的值保持不变。现在我们证明  $|c|$  小于 1。以  $e_+$  表示时间序列  $x_t + ax_{t-1}$ ，它是  $x_t$  在顺时预测中的误差，以  $e_-$  表示时间序列  $x_{t-2} + \bar{a}x_{t-1}$ ，它是  $x_t$  在逆时预测中的误差。有了这些，(7-2-6) 成为

$$\begin{aligned} E &= \sum_t \left| e_+ - ce_- \right|^2 + \left| \bar{e}_- - c\bar{e}_+ \right|^2 \\ &= \sum_t \overline{(e_+ - ce_-)} (e_+ - ce_-) + \\ &\quad \overline{(\bar{e}_- - c\bar{e}_+)} (\bar{e}_- - c\bar{e}_+) \end{aligned} \quad (7-2-7)$$

令它对于  $\bar{c}$  的微商等于零

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_t \bar{e}_- (e_+ - ce_-) + e_+ (\bar{e}_- - c\bar{e}_+) \\ c &= \frac{\sum_t 2\bar{e}_- e_+}{\sum_t \bar{e}_+ e_+ + \bar{e}_- e_-} \end{aligned} \quad (7-2-8)$$

(可以看到， $\partial E / \partial c = 0$  也给出同样的结果。)  $|c|$  总是小于 1。这可以从矢量  $e_+ \pm e_-$  的长度总是正值看出。特别

$$\begin{aligned} \sum_t \left| e_+ \pm e_- \right|^2 &\geq 0 \\ \sum_t \bar{e}_+ e_+ \pm \bar{e}_+ e_- \pm \bar{e}_- e_+ + \bar{e}_- e_- &\geq 0 \\ \sum_t \bar{e}_+ e_+ + \bar{e}_- e_- &> 2 \left| \bar{e}_- e_+ \right| \end{aligned} \quad (7-2-9)$$

$$|c| \leq 1$$

如果我们重新规定

$$e_+ \leftarrow e_+ - ce_- \quad (7-2-10a)$$

$$e_- \leftarrow e_- - \overline{c} e_+ \quad (7-2-10b)$$

可得这三项滤波器  $(1, a'_1, a'_2) = (1, a_1 - c\overline{a_1}, -c)$  的顺时与逆时预测误差。于是，我们能回到(7-2-7)，并进行递推。递推过程中， $e_+$  和  $e_-$  逐渐成为不可预测的随机数了。这时，我们找到了一个滤波器  $A(Z)$ ，它把  $X(Z)$  顺时或是逆时地过滤，最后输出是白光。由于输出具有常数谱，所以输入的谱一定是滤波器谱的倒数。

在后面的章节中，我们将对伯格算法给出一种波的传播方面的解释。在成层介质中，参数  $c_k$  可解释为反射系数；矢量  $e^+$  和  $e^-$  可解释为上行波和下行波，计算一串  $c_k$  的全过程，相当于将地面地震记录向地下延拓，以确定所探求的地下模型  $c_k$ 。

### 练习

1. 考虑十个点  $(1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1)$  的时间序列。计算  $C$  和  $A$  至  $Z$  的立方。用伯格方法计算自相关  $r_t$ ，一个是以截尾采样估计  $R(Z)$ ，另一个是在时间域中把数据采样直观地扩展到正负无穷而估计  $R(\hat{Z})$ 。试比较用这两种不同做法得到的  $r_t$ 。

2. 修改图 7-1 中的程序，以计算并包含属于谱中的标量因子  $V$ 。

## 7-3 自适应滤波

自适应滤波是一种随时间改变的、能适应被过滤的时间序列各种变化的滤波。比方说，要顺时预测时间序列的一个点。我们可以取许多过去的的数据来设计这个滤波器，然后，把这滤波器应用到当前来到的数据，以预测将要来到的数



```

SUBROUTINE BURGC(LX,X,EP,EM,LC,C,A,N2048,S)
C GIVEN A TIME SERIES X(1...LX) GET ITS LOG SPECTRUM S(1...N2048)
DIMENSION X(LX),EP(LX),EM(LX),C(LC),A(LC),S(N2048)
COMPLEX X,EP,EM,C,A,S,TOP,BOT,EPI,CONJG,CLOG
DO 10 I=1,N2048
10  S(I)=0.
    A(1)=1.
    DO 20 I=1,LX
        EM(I)=X(I)
20  EP(I)=X(I)
    DO 60 J=2,LC
        TOP=0.
        BOT=0.
        DO 30 I=1,LX
            BOT=BOT+EP(I)*CONJG(EP(I))+EM(I-J+1)*CONJG(EM(I-J+1))
30  TOP=TOP+EP(I)*CONJG(EM(I-J+1))
        C(J)=2*TOP/BOT
        DO 40 I=J,LX
            EPI=EP(I)
            EP(I)=EP(I)-C(J)*EM(I-J+1)
40  EM(I-J+1)=EM(I-J+1)-CONJG(C(J))*EPI
        A(J)=0.
        DO 50 I=1,J
50  S(I)=A(I)-C(J)*CONJG(A(J-I+1))
        DO 60 I=1,J
60  A(I)=S(I)
        CALL FORK(N2048,S,+1.)
        DO 70 I=1,N2048
70  S(I)=CLOG(S(I))*2.
    RETURN
END

```

图 7-1

这是按伯格算法编制的计算程序。程序中采用文中的记号，数据  $X$  是一个矢量，维数是  $LX$ ，选择  $LC \leq LX$  是高分辨率和高散布之间的一项折衷方案。频率轴上点的密度，由  $N2048 \gg LX$  控制着，是为作图方便而规定的，频率点密度应该大到足以分辨狭窄的谱线。

据。随着时间的推移，根据新测到的数据，又需要重新计算滤波器。那么，滤波器经多少时候就该重新设计一次呢？想象中，应尽量频繁地重新设计，或许在每得到一新数据点之后，就重新计算一下才好。而实际上，这样做就太浪费了。因为应用一个长度为  $n$  的滤波器去取得一新输出点需要做  $n$  次乘加运算。用来文森递推重新计算该滤波器则需大约  $n^2$

个乘加。然而，常常可预想到，在一个新数据点到达时，滤波器只需做很少的改变就成了。为此，我们将给出外德鲁 (Widrow) [28] 自适应滤波算法，只用  $n$  个算术运算就可把滤波器修改好。这样，在每一个数据点进入时，都可计算一个新滤波器了。

为了确切说明这个方法，可考虑二项预测的情况， $e_t$  是从时间序列过去的两个值预测该序列  $x_t$  产生的误差

$$e_t = x_t - bx_{t-1} - cx_{t-2} \quad (7-3-1)$$

预测中误差的平方和是

$$E = \sum_t e_t^2 = \sum_t (x_t - bx_{t-1} - cx_{t-2})^2 \quad (7-3-2)$$

如果参数  $b$  挑选得正确，我们将得出  $\partial E / \partial b = 0$ 。不过，如果时间序列  $x_t$  的性质随时间变化，当新的数据包含进 (7-3-2) 的和时， $\partial E / \partial b$  可能变得不等于零。由于  $E$  是  $b$  的正二次函数，如果  $\partial E / \partial b$  变成了正值，那么  $b$  就该取小一点。如果  $\partial E / \partial b$  变成了负值，那么  $b$  就该取大一点。见图 7-2。

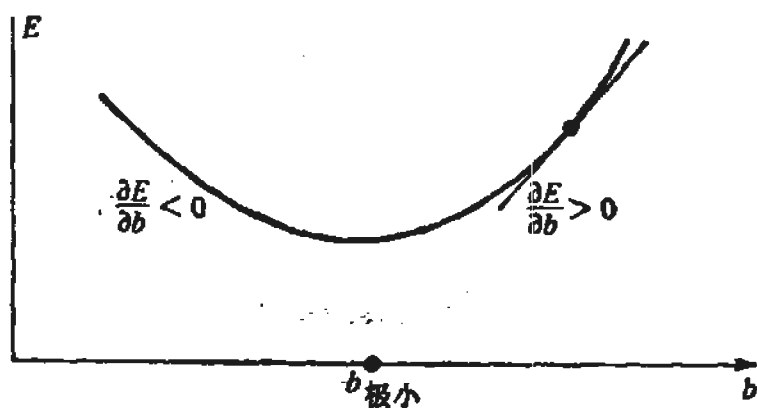


图 7-2

这个偏微商的符号说明  $b > b_{\min}$ ，或  $b < b_{\min}$

从 (7-3-2)，我们得

$$\frac{\partial E}{\partial b} = - \sum_{i=-\infty}^t 2e_i x_{i-1} \quad (7-3-3)$$

由于加进了数据点  $x_t$ , 引起  $\partial E / \partial b$  中的变化正好是  $-2e_t x_{t-1}$ ; 所以, 启发我们用下述方法修改  $b$  和  $c$

$$\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} + k e_t \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \end{bmatrix} \quad (7-3-4)$$

这里,  $k$  表示待调整的量, 我们愿意作这种调整, 在一次时间步进中修改  $b$  和  $c$ 。如果  $k$  选得很小, 调整就进行得很慢。如果  $k$  太大, 又会越过极小值; 不过, 过去了可以再跳回来, 或许, 下一步又越过极小值了, 总之, 经几步调整, 有希望选定  $k$ 。  $k$  的选定, 部分地是由尚在研究中的时间序列  $x_t$  的性质所决定的。

处理相同的问题还可以有许多不同的做法。例如, 可以借用  $L_1$  范数对下式求极小

$$E(c) = \sum_t |cx_t - y_t| \quad (7-3-5)$$

所得出的自适应便会是

$$c \leftarrow c - k x_t \operatorname{sgn}(cx_t - y_t) \quad (7-3-6)$$

式子 (7-3-5) 显见是数据加权。更为健全的做法是一致数据加权

$$E(c) = \sum_t \left| c - \frac{y_t}{x_t} \right| \quad (7-3-7)$$

可导致自适应

$$c \leftarrow c - k \operatorname{sgn} \left( c - \frac{y_t}{x_t} \right) \quad (7-3-8a)$$

等同于

$$c \leftarrow c - k \operatorname{sgn}(x_t) \operatorname{sgn}(cx_t - y_t) \quad (7-3-8b)$$

(7-3-5) 和 (7-3-7) 两例可类似于伯格算法那样扩展到平稳序列。仿 (7-3-7)，我们还可对

$$E = \sum_t \left| c - \frac{y_t}{x_t} \right| + \left| c - \frac{x_t}{y_t} \right| \quad (7-3-9)$$

求极小。由于

$$-1 \leq \text{中位数} \left( 0, \frac{y_t}{x_t}, \frac{x_t}{y_t} \right) \leq +1$$

(所有的  $t$ )

使得可以在一适当范围内选定  $c$ 。

### 练习

1. 如果  $x_t$  的物理量纲为伏特， $k$  的量纲是什么？如果  $x_t$  具有100伏的一个均方根值，采样间隔  $\Delta t$  是1毫秒，问  $k$  取什么值可使外德鲁滤波器约一秒内适应新条件？

2. 考虑时间序列  $x_t = (\dots, 1, 1, 1, 1, -4, 1, 1, 1, 1, -4, 1, 1, 1, 1, -4, \dots)$ 。作形如  $x_{t+1} = cx_t$  的预测。问最小平方预测的结果是什么？数据加权和一致数据加权两种类型  $L_1$  范数的预测的结果是什么？

## 7-4 多道滤波器的设计

多道滤波器经常是有用的。例如，有了一个矢量预测滤波器，我们就可以利用一个序列的过去以及一组其它序列的

过去来预测前个序列。有了一个矩阵预测滤波器，我们便能够用整组序列的过去来预测这组序列。如果序列之间有关连，成组预测就比单道的自身预测来得好。我们以  $x_t$  和  $y_t$  两个时间序列为例，假如我们要求把这两个序列转换成第三序列  $d_t$  的矢量滤波器。如果  $d_t$  是  $x_{t+1}$ ，这是一个对  $x_t$  的单位时间跃度预测滤波器。如果  $d_t$  是一个垂直的地震记录，而  $x_t$  和  $y_t$  是水平的地震记录，则这个两道滤波器可以被称为外插滤波器。我们想用最小平方求解的方程组是

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & & & & & \\ x_2 & y_2 & x_1 & y_1 & & & \\ x_3 & y_3 & x_2 & y_2 & x_1 & y_1 & \\ x_4 & y_4 & x_3 & y_3 & x_2 & y_2 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_m \end{bmatrix} \quad (7-4-1)$$

简记为

$$d \approx Bf \quad (7-4-2)$$

于是，如我们在前一章中所见到过的，它的解是

$$f = (B^T B)^{-1} B^T d \quad (7-4-3)$$

式中求逆的矩阵，把它叫做  $R$ 。对于有三个时间滞后的滤波器，得

$$R = \sum_t \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ x_{t-1} \\ y_{t-1} \\ x_{t-2} \\ y_{t-2} \end{pmatrix} (x_t \ y_t \ x_{t-1} \ y_{t-1} \ x_{t-2} \ y_{t-2}) \quad (7-4-4)$$

如果我们规定

$$r_{xx}(i) = \sum_t x_t x_{t+i}$$

$$r_{xy}(i) = \sum_t x_t y_{t+i}$$

$r_{yx}(i)$ 和 $r_{yy}(i)$ 也类似, 矩阵 (7-4-4) 成为

$$R = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xy}(0) & r_{xx}(-1) & r_{xy}(-1) & r_{xx}(-2) & r_{xy}(-2) \\ r_{yx}(0) & r_{yy}(0) & r_{yx}(-1) & r_{yy}(-1) & r_{yx}(-2) & r_{yy}(-2) \\ \hline r_{xx}(1) & r_{xy}(1) & r_{xx}(0) & r_{xy}(0) & r_{xx}(-1) & r_{xy}(-1) \\ r_{yx}(1) & r_{yy}(1) & r_{yx}(0) & r_{yy}(0) & r_{yx}(-1) & r_{yy}(-1) \\ \hline r_{xx}(2) & r_{xy}(2) & r_{xx}(1) & r_{xy}(1) & r_{xx}(0) & r_{xy}(0) \\ r_{yx}(2) & r_{yy}(2) & r_{yx}(1) & r_{yy}(1) & r_{yx}(0) & r_{yy}(0) \end{bmatrix} \quad (7-4-5)$$

我们可以把 (7-4-5) 这个  $6 \times 6$  的矩阵划分成以  $2 \times 2$  子矩阵为元素的  $3 \times 3$  矩阵。如果我们把子矩阵块记为

$$R(\tau) = \begin{bmatrix} r_{xx}(\tau) & r_{xy}(\tau) \\ r_{yx}(\tau) & r_{yy}(\tau) \end{bmatrix} = R^T(-\tau) \quad (7-4-6)$$

那么, (7-4-5) 用 (7-4-6) 的记法来表示, 则为

$$R = \begin{bmatrix} R(0) & R(-1) & R(-2) \\ R(1) & R(0) & R(-1) \\ R(2) & R(1) & R(0) \end{bmatrix} \quad (7-4-7)$$

(7-4-7) 中的矩阵叫做“块元陶布里兹”或“多道陶布里兹”矩阵。如对普通的陶布里兹矩阵一样, 对块元陶布里兹矩阵也有巧妙的解法, 在下一节中再讲。

读者应注意到, 矩阵  $R$  不依赖于期望输出  $d$ 。当有多个可能的输出时, 可多次使用计算机内保存的  $R$ 。如在要求预测若干个不同的序列或在一指定序列上按几个不同距离预测

其将来时，就是一个例子。

### 练习

1. 在第2章的练习里，我们确定了  $B(Z)$  和  $A(Z)$ ，对某个已知幂级数  $C(Z)$  满足  $C(Z) = B(Z)/A(Z)$ 。请写出使

$$\min(A, B) = \sum_t \left( B_t - \sum_{\tau} c_{t-\tau} A_{\tau} \right)^2$$

达到最小的正交方程（不必求解），其中

$$A = (A_0, A_1, A_2) \quad B = (B_0, B_1, B_2)$$

且约定  $A_0 = 1$ （用研究来文森递推的办法可证明  $A(Z)$  是最小相位）。

## 7-5 来文森递推法

来文森递推法是求解正交方程的一个简捷方法。可以证明，它等价于正交多项式理论中的递推关系。因为矩阵  $R$  实际上只有  $N$  个不同的元素，而一个普通矩阵可以有  $N^2$  个不同元素，这就使来文森方法的简捷化成为可能。

来文森曾对单个时间序列建立了他的递推方法（基本概念见第3-3节）。对于多重时间序列做递推，只是略微麻烦一点而已。我们从预测误差正交方程看起。对于多重时间序列，与单个时间序列不一样，当时间反向时，预测问题是要改变的。我们可以把顺时和逆时预测误差这两个正交方程写作一个方程，为 (7-5-1)。

主要应说明递推的步骤，我们将说明，在给出了三项滤波器的解  $A$  和  $B$  时

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_{-1} & R_{-2} \\ R_1 & R_0 & R_{-1} \\ R_2 & R_0 & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B_2 \\ A_1 & B_1 \\ A_2 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_A & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_B \end{bmatrix} \quad (7-5-1)$$

可通过  $A$  和  $B'$  的线性组合求解  $A$  和  $B'$  四项滤波器

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_{-1} & R_{-2} & R_{-3} \\ R_1 & R_0 & R_{-1} & R_{-2} \\ R_2 & R_1 & R_0 & R_{-1} \\ R_3 & R_2 & R_1 & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B_3 \\ A_1 & B_2 \\ A_2 & B_1 \\ A_3 & I \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} V_A & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_B \end{bmatrix} \quad (7-5-2)$$

这可以在

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_{-1} & R_{-2} & R_{-3} \\ R_1 & R_0 & R_{-1} & R_{-2} \\ R_2 & R_1 & R_0 & R_{-1} \\ R_3 & R_2 & R_1 & R_0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} I \\ A_1 \\ A_2 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ B_1 \\ I \end{bmatrix} \beta \right\} = \begin{bmatrix} V_A \\ 0 \\ 0 \\ E_A \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} E_B \\ 0 \\ 0 \\ V_B \end{bmatrix} \beta \quad (7-5-3)$$

中选择常数矩阵  $\alpha$  和  $\beta$  达到。

挑选  $\alpha$  和  $\beta$  以形成  $A$ ，使得在 (7-5-3) 右边的底部元素为 0。即， $\alpha = I$ ， $\beta = -V_B^{-1}E_B$ 。挑选  $\alpha$  和  $\beta$  以形成  $B$ ，使得在右边的顶部元素为 0，即， $\beta = I$ ， $\alpha = -V_A^{-1}E_A$ 。

当然，我们需要解决的问题不仅是预测误差问题。我们还需要解具有任意右端  $G$  的滤波器问题，如何从  $3 \times 3$  递推  $4 \times 4$  呢？这可从下面的结构 (7-5-4) 中挑选  $\gamma$ ，使得  $E_f + V_B \gamma = G$ ，来求得。

$$\begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_3 \\ B_2 \\ B_1 \\ I \end{bmatrix} \gamma \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ E_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V \end{bmatrix} \gamma \right\} \quad (7-5-4)$$



## 7-6 约束滤波

通常在地球物理中研究一平面波（信号），由一组接收器接收。我们希望在每个接收器上都看到这同一波形。然而，在每个接收器上都出现讨厌的干扰，且这种干扰在不同的接收器上可能是相干的，也可能不相干。事实上，我们可以设想一种情况，每个接收器上干扰都达到了这种程度，若只有一个接收器的话，信号就根本没法探测出来。这是列文(Levin)[29]在他想用地震记录仪阵列探测地下微弱的核爆炸时，所碰到的问题。他提出一种带约束条件的多道滤波器。首先假定，所有的信号都在同一时间到达，或者，如果到达时间不同，至少这些信号是已知的，可以将各数据道经移动后排齐。现在问题是要把每个道过滤一下，再把各道加起来；干扰应该被减弱了，而信号的形状应该予以保持。以  $f_1(j)$  表示在第  $i$  道、第  $j$  个滞后上的滤波权。例如，可考虑两道和三个时间滞后。于是列文的免除信号畸变的约束是

$$\begin{aligned} 1 &= f_1(0) + f_2(0) \\ 0 &= f_1(1) + f_2(1) \\ 0 &= f_1(2) + f_2(2) \end{aligned} \quad (7-6-1)$$

这就不会引起信号畸变了，因为如果同一信号  $s(Z)$  进入每一个道，输出只是  $s(Z)[f_1(Z) + f_2(Z)]$ ，但是， $f_1 + f_2$  在此情况下，正好是  $(1, 0, 0)$ ，在一般情况下，是一个  $\delta$  函数。我们把方程组 (7-6-1) 称为约束方程，因为方程个数比未知数个数少。约束方程可以写成常见的形式

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ f_1(0) \\ f_2(0) \\ f_1(1) \\ f_2(1) \\ f_1(2) \\ f_2(2) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-6-2)$$

并可简记为  $Gf = 0$ ，当我们用最小平方法对滤波输出的总能量取极小时，又可能把信号和干扰都给压制了。然而，约束方程可避免对信号的压制，因而，仅使干扰削弱。如果我们用  $R$  表示输入数据的谱矩阵，那么，解形如下式的方程

$$\begin{bmatrix} R & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (7-6-3)$$

就可确定滤波器  $f$ ，我们曾在前几节里解过这种类型的方程。

### 练习

1. 在一个应用中，道的放大率不能很好地控制住，滤波器的前两项是  $f_1(0) = 100$  和  $f_2(0) = -99$ 。虽然这个滤波器在其设计的各方面都很令人满意，可是仍被认为不合用，因为在每一道上有恒等的信号这一假说只是一个合理的近似，实际并不全然如此。请提出一个更合适的约束矩阵。

2. 设在地面上，并排摆了三个地震记录仪。研究其约束条件时，暗示着所有的信号在同一时间到达，即都是垂直入射波。请定义一个约束矩阵，要求这矩阵通过该垂直入射波，又通过符合  $x_1(t) = x_2(t+1) = x_3(t+2)$  的波。问：既能满足这些约束，又有可能压制干扰的最短滤波器是什么？

3. 请考虑含有  $k$  个滤波滞后的  $m$  道列文滤波器。问：  
(7-6-3) 中的矩阵多大？

## 第 8 章 波场与反射系数的计算

在物理学的各个分支里，几乎都有波。我们也要研究波。这一章，不涉及很多物理和微分方程的知识，只用到延迟、连续性及能量守恒等一般原理。其成果可直接应用于声波、水波、薄膜中的光、压缩型及切变型两种类型的正规入射弹性波、电磁波、传输线路、梯形电网络，以及其它类似的方面。这些方法还可应用于扩散问题。我们第一个主要目的，是在给出了反射系数时，解决波场的计算问题。第二个目的，是由观察到的波，计算界面的反射系数。

### 8-1 反射系数和透射系数

考虑两个半空间（上为天空，下为地面）。如果有一个单位振幅（即振幅为 1）的波射到边界上，就会产生一个振幅为  $t$  的透射波和一个振幅为  $c$  的反射波，如图 8-1 所示。

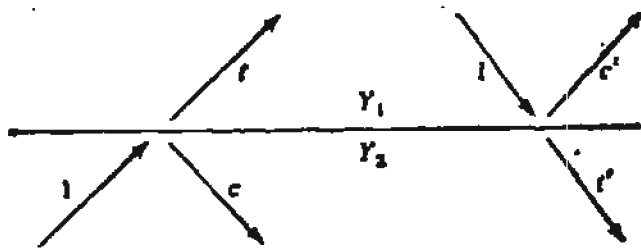


图 8-1

一个界面上的入射波，反射波  $c$  及透射波  $t$

$t$  与  $c$  之间存在着很简单的关系。波振幅具有一种象压力、物质位移、或切向电场、切向磁场的物理意义，这些物

理变量在边界的两側必定相同。因此，有

$$t = 1 + c \quad (8-1-1)$$

$$t' = 1 + c' \quad (8-1-2)$$

可能令人惊讶的是， $t$  可以比 1 还大。这种现象在海洋上很容易见到，即当波浪接近海岸时，就会变大（直到它们击碎为止）。能量并不是只由波的高度来决定的，能量等于波振幅的平方乘以一个比例因子  $Y$ ，这个因子是以波从哪一种介质中测量出来而定。如果我们把顶部介质的因子记为  $Y_1$ ，底部介质的因子记为  $Y_2$ ，那么，入射前的能量等于入射后的能量，便可表达为

$$Y_2 1^2 = Y_2 c^2 + Y_1 t^2 \quad (8-1-3)$$

解出  $c$ ，得

$$0 = -Y_2 + Y_2 c^2 + Y_1 (1 + c)^2$$

$$0 = (c - 1)Y_2 + (c + 1)Y_1$$

$$0 = c(Y_2 + Y_1) + (Y_1 - Y_2) \quad (8-1-4)$$

$$c = \frac{Y_2 - Y_1}{Y_2 + Y_1}$$

在声学上，上行波和下行波变量可归为压力或速度。当度量速度时，乘以速度平方的比例因子称为阻抗  $I$ 。当度量压力时，乘以压力平方的比例因子称为导纳  $Y$ 。

当能量从另一边入射时，反射波  $c'$  可从 (8-1-4) 得出，只要在该式中将  $Y_1$  和  $Y_2$  互换一下。于是

$$c' = -c \quad (8-1-5)$$

全反射界面是一个不透过能量的界面。这不但在  $t = 0$  或  $c = -1$  时会发生，而且当  $t = 2$  或  $c = +1$  时也会发生。要了解这一点，可注意图 8-1 中的左半。

$$\frac{\text{透过能量}}{\text{入射能量}} = \frac{Y_1 t^2}{Y_2 l^2} = \frac{Y_1}{Y_2} \left( 1 + \frac{Y_2 - Y_1}{Y_1 + Y_2} \right)^2$$

$$= \frac{Y_1}{Y_2} \left( \frac{2Y_2}{Y_1 + Y_2} \right)^2 = \frac{4Y_1 Y_2}{(Y_1 + Y_2)^2} \quad (8-1-6)$$

等式 (8-1-6) 说明：当  $Y_1 = Y_2$  时，百分之百的入射能量皆可透过。但当  $Y_1$  和  $Y_2$  相差很大时，透过的百分比就很小。

要留心的事：某些人不以在边界上连续变化的变量给反射系数和穿透系数下定义。在一般情况下，这会把波的理论与其特定应用的关系弄得含糊不清； $t \neq 1 + c$  绝不是特定应用上的本质特征，这只是在描述上选择变量不够理想的结果。例如，声学方面，物质密度是一个不理想的变量，因为它在物质边界上不具有连续性。压力或法向速度则是波的强度较好的描述。

通常用两种变量来描述波，这两种变量都能在物质不连续的情况下是连续的，一种是标量，如压力、张力、电压、位能、应力或温度。另一种是矢量，我们用它的垂直分量。矢量的例子，如速度、伸长、电流、位移和热流。有时，波变量是张量。当边界条件是使一个运动分量消失时，这种边界通常就叫做刚性的。当消失的是压力或位能时，这边界通常叫做自由的。刚性边界和自由边界反射波的反射系数都为 1。

本章的目的在于确立各层中波的基本数学性质，而又避免专论波的任何特殊物理类型。特殊类型的波下一章再讲。不过，为了不掩盖数学的物理面貌，现即以古典声学的术语给上行波  $U$  和下行波  $D$  下明确的定义。在声学中，研究压

力  $P$  和群速度  $W$  的垂直分量（别与波速  $v$  混淆）。对于  $U$  和  $D$  的一种可能的定义（这将在第 9 章第 3 节中导出）是

$$D = \frac{P + W/Y}{2} \quad (8-1-7a)$$

$$U = \frac{P - W/Y}{2} \quad (8-1-7b)$$

其逆转的关系为

$$P = D + U \quad (8-1-8a)$$

$$W = (D - U) Y \quad (8-1-8b)$$

也可以用不同的标量因子和记号另作定义。用这个定义，很容易看出来，关系式  $t = 1 + c$  是和 (8-1-8a) 及一个界面上的压力的连续性相联系的。(8-1-7) 和 (8-1-8) 中的负号是和  $z$  轴的方向相联系的，把  $z$  轴掉个头， $W$  变成  $-W$ ， $U$  和  $D$  也要互换。

我们注意到，下行波  $D$ ，在  $U$  为零的情况下， $D$  本身就对压力  $P$  和群速度  $W$  都提供了一个运动的扰动，而且  $U$  为零还说明， $W$  与  $P$  之比是这物质的固有导纳  $Y$ ， $W/P = Y$ 。我们说过，能量与  $YP^2$  或与  $IW^2$  成正比，由此，比值  $W/P = Y$  使我们推断一个物质的阻抗是其导纳的倒数  $I = 1/Y$ 。

对于海洋中的声波，由于空气和水之间的巨大差异，海面近乎一个全反射面。如果把界面理想化为全反射面，它就是一个自由表面。因为压力在自由表面上为零，我们得出，在表面上  $D = -U$ ，所以反射系数是  $-1$ 。如果在表面上可以看到波，就不仅需要测量压力，还要测量和速度成反比的某种量。在地球物理勘探实践中，要使用对压力敏感的

水中检波器。并且必须放在海面下一个合适的距离。所述情况可由图8-2来描述。压力在海面上通常为零,可是如果我们希望发出一个脉冲扰动,顷刻间压力可取另外一些数值,譬如1。这由图8-3来描述。海面由源和产生声波引起的速度总垂直分量是  $D - U = 1 + 2R(Z)$ 。

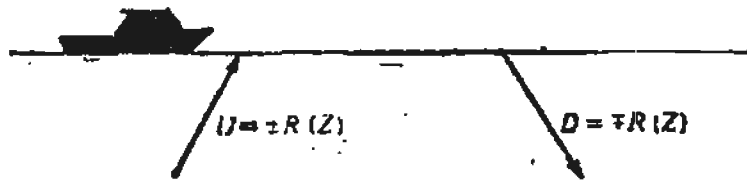


图 8-2

海面上反射的波形  $R(Z)$ 。压力等于  $U + D$ , 在水面消失。水面的垂直速度与  $D - U$  成正比。理论上讲,是在水面上用测量  $W$  的方法观察波;可是实际上,经常是在水面下一个波长的几分之几的地方观察  $P$ 。

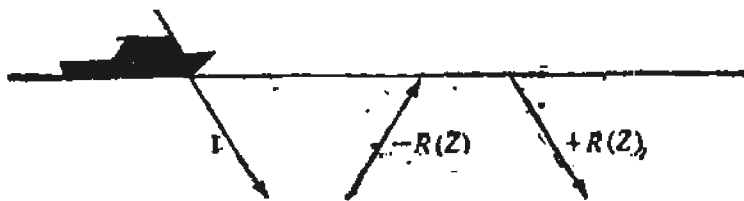


图 8-3

发出时为下行的扰动 1, 后来形成上行的反射波  $-R(Z)$ , 它又向下反射回去为  $R(Z)$ 。水面上的压力是  $D + U = 1 + R - R = 1$ 。

### 练习

1. 计算  $t$ , 求它对  $Y_1$  和  $Y_2$  的表达式。
2. 在某应用中, 连续性被说成是: 在界面两侧  $D - U$  都相同。意味着  $t = 1 - c$ 。请按 (8-1-4) 的样子, 用导纳  $Y$  推算反射系数的方程。
3. 用阻抗  $I$  术语表示, 反射系数和穿透系数是什么?  
(把结果中的分式约简)

## 8-2 层状介质中的能流

首先研究一个层里的波的共振。令通过该层又返回的旅行时由延迟算子  $Z$  给出。见图8-4。在层上面看到的波有下

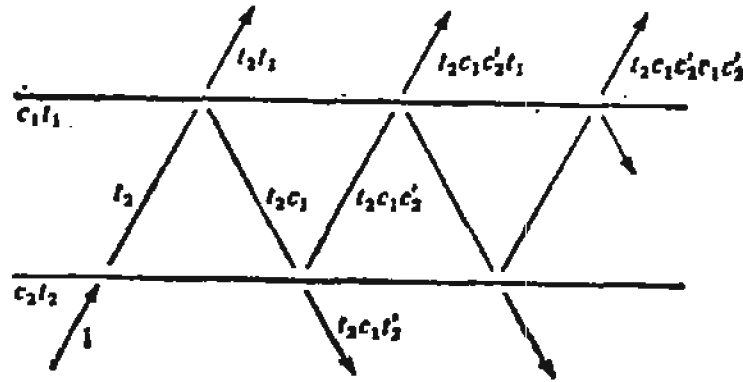


图 8-4

一个层里对应于共振的射线

列形式

$$t_2 t_1 [1 + c_1 c'_2 Z + (c_1 c'_2)^2 Z^2 + \dots] = \frac{t_2 t_1}{1 - c_1 c'_2 Z}$$

这个无穷级数可以求和，并不是什么意外。我们一会儿就会看到，对于  $n$  层的情况，波（时间持续为无限）可以用一个简单的  $n$  阶多项式来表达。我们要研究多层的情形，考虑从已知反射系数计算波场并从测到的波确定反射系数的一般性问题。

已知反射系数和穿透系数，就可以计算由一个波撞击一层所产生的一些波。方程 (8-2-1) 与图8-5结合起来，说明如何从  $U$  和  $D'$  外推将来，以求得  $U'$  和  $D$

$$\begin{aligned} U' &= tU + c'D' \\ D &= cU + t'D' \end{aligned} \quad (8-2-1)$$

让我们把 (8-2-1) 再整理一下，把  $U'$  和  $D'$  移至右边，把  $U$  和  $D$  移至左边。这样，我们就有了一个从带撇的介质



外推到不带撇的介质的方程。得出

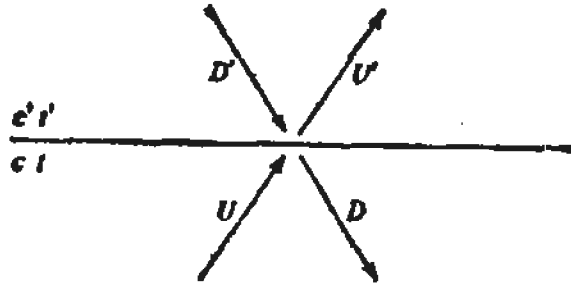


图 8-5

波的人射及界面反射

$$\begin{aligned} -tU &= -U' + c'D' \\ -cU + D &= t'D' \end{aligned}$$

这可以用矩阵形式排列

$$\begin{bmatrix} -t & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & c' \\ 0 & t' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U' \\ D' \end{bmatrix}$$

现在用左边矩阵的逆左乘上式两边，得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix} &= \frac{1}{-t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & c' \\ 0 & t' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U' \\ D' \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-t} \begin{bmatrix} -1 & c' \\ -c & ct' - tt' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U' \\ D' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

最后得出的结果，是一个从带撇的介质外推到不带撇的介质的方程

$$\begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix} = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U' \\ D' \end{bmatrix} \quad (8-2-2)$$

现在，让我们考虑图8-6中的高皮罗 (Goupillaud) 型<sup>[30]</sup>层

状介质。对于这样排列的层，(8-2-2)写成

$$\begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_{k+1} = \frac{1}{t_k} \begin{bmatrix} 1 & c_k \\ c_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}'_k$$

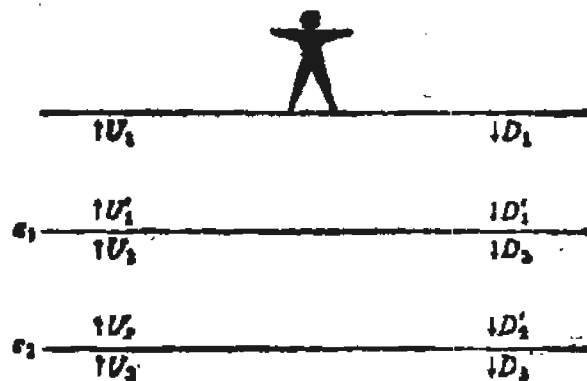


图 8-6

高皮罗型层状介质 (各层之间有相等旅行时)

令  $Z = e^{i\omega T}$ , 其中  $T$  为双程旅行时, 等于数据采样间

隔。很明显, 乘以  $\sqrt{Z}$  就等同于用  $\frac{T}{2}$  来延迟一个函数。

$\frac{T}{2}$  是穿越一层的旅行时。这就给出了第  $k$  层带撇波和不带

撇波之间的关系式

$$\begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}'_k = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{Z} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_k \quad (8-2-3)$$

把 (8-2-3) 代入 (8-2-2), 我们可得一个“层矩阵”

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_{k+1} &= \frac{1}{t_k} \begin{bmatrix} 1 & c_k \\ c_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{Z} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_k \\ &= \frac{1}{t_k} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{Z} & c_k\sqrt{Z} \\ c_k/\sqrt{Z} & \sqrt{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_k \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Z} t_k} \begin{bmatrix} 1 & c_k Z \\ c_k & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_k \quad (8-2-4)$$

如果有能量流穿过重叠的各层，那么，在第  $k$  层和第  $(k+1)$  层都该有同样的总流量流过。否则，在层的边界上就有能量的源或壑。在第  $k$  层中，任一频率  $\omega$  的纯朝上的能流（能的流量）可由下面的式子表示（flux 表示流量）

$$\text{flux}(\omega) = Y_k \left[ U(Z) \bar{U}\left(-\frac{1}{Z}\right) - D(Z) \bar{D}\left(-\frac{1}{Z}\right) \right]_k \quad (8-2-5)$$

要证实这确实是不依赖于  $k$  的，我们取 (8-2-4) 的赫米森共轭（相应于实  $\omega$  的转置与共轭）

$$\begin{aligned} \left[ U\left(-\frac{1}{Z}\right) D\left(-\frac{1}{Z}\right) \right]_{k+1} &= \frac{1}{t_k} \left[ U\left(-\frac{1}{Z}\right) D\left(-\frac{1}{Z}\right) \right]_k \\ &\begin{bmatrix} \sqrt{Z} & c_k \sqrt{Z} \\ c_k / \sqrt{Z} & 1 / \sqrt{Z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8-2-6)$$

现在把 (8-2-4) 和 (8-2-6) 联起来

$$\begin{aligned} &\left[ U\left(-\frac{1}{Z}\right) D\left(-\frac{1}{Z}\right) \right]_{k+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(Z) \\ D(Z) \end{bmatrix}_{k+1} \\ &= \frac{1}{t_k^2} [\bar{U} \quad \bar{D}]_k \begin{bmatrix} \sqrt{Z} & \sqrt{Z} c_k \\ c_k / \sqrt{Z} & 1 / \sqrt{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} 1 / \sqrt{Z} & \sqrt{Z} c_k \\ c_k / \sqrt{Z} & \sqrt{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_k \\ &= \frac{1}{t_k^2} [\bar{U} \quad \bar{D}]_k \begin{bmatrix} 1 - c_k^2 & 0 \\ 0 & c_k^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_k \end{aligned} \quad (8-2-7)$$

由于  $(1 - c_k^2) / t_k^3 = t'_k / t_k = Y_k / Y_{k+1}$ , 这可以作为所期望的结果而改写一下

$$Y_{k+1} \left[ U\left(\frac{1}{Z}\right)U(Z) - D\left(\frac{1}{Z}\right)D(Z) \right]_{k+1} \\ = Y_k \left[ U\left(\frac{1}{Z}\right)U(Z) - D\left(\frac{1}{Z}\right)D(Z) \right]_k \quad (8-2-8)$$

方程 (8-2-8) 说明: 对于每个频率  $\omega$ , 通过第  $k$  层的能的流量与通过第  $(k+1)$  层的能的流量相等。

这一能流定理直接引出关于层状构造散射出来的波形的某些论断。图8-7说明的是反射地震学的基本几何关系。把能

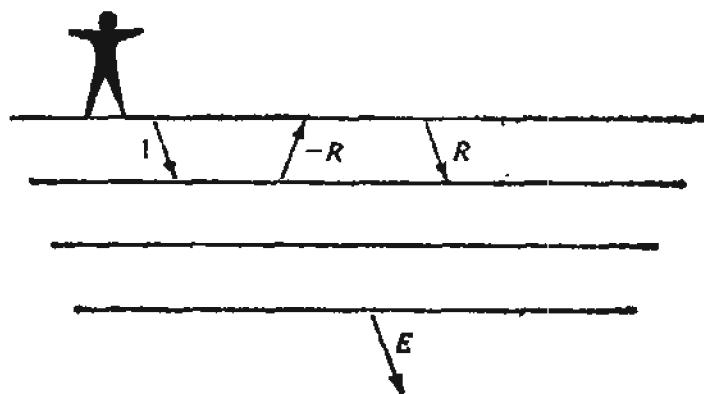


图 8-7

地震的基本反射几何关系。在地面发出一个下行的脉冲。地壳则送  $-R(Z)$  返回地面。因为地面是全反射的, 地面又把一个  $R(Z)$  送入地球。从诸层底部逸散的波  $E(Z)$ , 奔向地壳的另一边去了。

流定理应用到这个图形上, 我们可以说, 顶层的能的流量等于下边半空间内的能的流量, 所以

$$Y_1 \left\{ R\left(\frac{1}{Z}\right)R(Z) - \left[ 1 + R\left(\frac{1}{Z}\right) \right] \left[ 1 + R(Z) \right] \right\} \\ = -Y_k E\left(\frac{1}{Z}\right)E(Z)$$

或者

$$1 + R\left(-\frac{1}{Z}\right) + R(Z) = \frac{Y_k}{Y_1} E\left(-\frac{1}{Z}\right) E(Z) \quad (8-2-9)$$

这一很值得注意的结果说明，设想我们去观察逸散的波  $E(Z)$ ，我们就能借自相关将地面上看到的波形构造出来。我们以后会了解， $E(Z)$  是最小相位，所以  $E$  可用谱因子分解，由  $R$  建立起来。

现在让我们把注意力转到图 8-8 描述的天然地震的地震

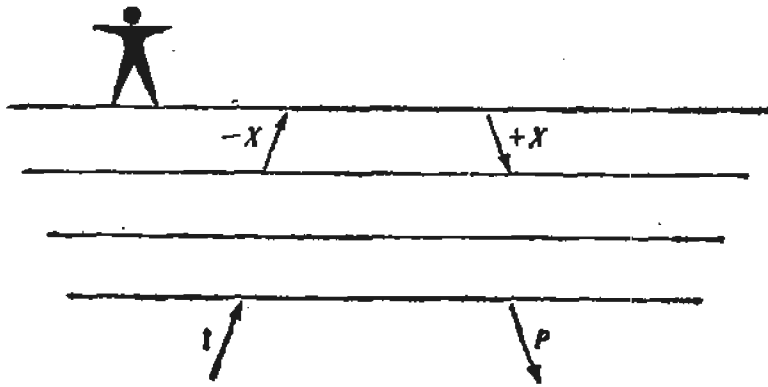


图 8-8

天然地震的地震几何学，脉冲 1 从下面入射上来。波形  $X(Z)$  入射到自由地面又反射回下面去。波形  $P(Z)$  则散射回到地壳中去。

几何关系上。把能流定理应用于这个图形，我们得出

$$\begin{aligned} & Y_1 \left[ X\left(-\frac{1}{Z}\right) X(Z) - X\left(-\frac{1}{Z}\right) X(Z) \right] \\ & = Y_k \left[ 1 - P(Z) P\left(-\frac{1}{Z}\right) \right] \end{aligned}$$

或者

$$1 = P(Z) P\left(-\frac{1}{Z}\right) \quad (8-2-10)$$

对这个结果的解释是，往回散射的波形  $P(Z)$  具有全通滤波器的形式，这个结果根据物理学是可以预料到的，因为入射的全部能量一点不衰减地、完整地反射过来了；因此，唯一可能发生的只是出现与频率有关的延迟。

最后，我们推导出关于阻抗函数和导纳函数的能流定理（这些函数具有实部为正的付里叶变换）。假定下行波  $D(Z)$  在所有频率上都比上行波  $U(Z)$  强，即

$$D\left(\frac{1}{Z}\right)D(Z) - U\left(\frac{1}{Z}\right)U(Z) > 0 \text{ 在 } |Z|=1 \text{ 上} \quad (8-2-11)$$

（注意，这并不意味着  $|d_t| > |u_t|$ 。）可把 (8-2-11) 简写为

$$\bar{D}D - \bar{U}U > 0 \quad (8-2-12)$$

从 (8-2-11) 或 (8-2-12)，可以肯定， $(D-U)/(D+U)$  具有实部为正的付里叶变换。我们得到

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \frac{D-U}{D+U} &= \frac{D-U}{D+U} + \frac{\bar{D}-\bar{U}}{\bar{D}+\bar{U}} \\ &= \frac{(D-U)(\bar{D}+\bar{U}) + (\bar{D}-\bar{U})(D+U)}{(D+U)(\bar{D}+\bar{U})} \\ &= \frac{2(\bar{D}D - \bar{U}U)}{(D+U)(\bar{D}+\bar{U})} \end{aligned} \quad (8-2-13)$$

由 (8-2-12) 的假定，知 (8-2-13) 的分子是正的；(8-2-13) 的分母也是正的，因为这是时间函数  $d_t + u_t$  的谱，而任何谱总是正的。所以， $(D-U)/(D+U)$  称为“正实的。” $(D-U)/(D+U)$  的声学解释是  $(D-U)$  代表物质

速度的垂直分量,  $(D+U)$  表示物质压力。

### 8-3 由反射系数计算波场

层状物质可以用给出每一界面的反射系数的方法来描述。另一种描述方法是给出任何一个散射的波, 如前面出现过的  $R(Z)$ ,  $E(Z)$ ,  $X(Z)$  或  $P(Z)$ 。我们的目的在于熟悉这类问题的代数关系, 使我们能够通过对各层的任一种描述推断所有其它的描述。

上一节的一个重要结果是建立了“层矩阵” (8-2-4)。这种矩阵能够把在某一层观察到的波外推到在下一层里观察到的波上去。这种过程可以无限制地继续下去。譬如, 从层 1 外推到层 3, 以  $k=1$  的 (8-2-4) 代入  $k=2$  的 (8-2-4) 中, 得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_3 &= \frac{1}{\sqrt{Z}t_2} \begin{bmatrix} 1 & Zc^2 \\ c & Z \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{Z}t_1} \begin{bmatrix} 1 & Zc_1 \\ c_1 & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z^2t_1t_2}} \begin{bmatrix} 1 + Zc_1c_2 & Zc_1 + Z^2c_2 \\ c_2 + Zc_1 & Zc_1c_2 + Z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_1 \end{aligned} \quad (8-3-1)$$

细看一下这个例子, 使我们想到  $k$  层矩阵乘积的一般形式为

$$\frac{1}{\sqrt{Z^k} \prod_{j=1}^k t_j} \begin{pmatrix} F(Z) & Z^k G\left(\frac{1}{Z}\right) \\ G(Z) & Z^k F\left(\frac{1}{Z}\right) \end{pmatrix} \quad (8-3-2)$$

现在让我们证实 (8-3-2) 确是一般形式。先假定 (8-3-2) 在  $k=1$  时是正确的, 我们再用另一个层矩阵去乘 (8-3-2)

看看在  $k-1$  增到  $k$  时, 这乘积是否保持相同的形式。此乘积是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{Z^k}} \begin{bmatrix} 1 & c_k Z \\ c_k & Z \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{Z^{k-1} \prod_{j=1}^{k-1} c_j}} \begin{bmatrix} F(Z) & Z^{k-1} G\left(\frac{1}{Z}\right) \\ G(Z) & Z^{k-1} F\left(\frac{1}{Z}\right) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z^k \prod_{j=1}^k c_j}} \begin{bmatrix} F(Z) + c_k Z G(Z) & Z^{k-1} G\left(\frac{1}{Z}\right) + c_k Z^k F\left(\frac{1}{Z}\right) \\ c_k F(Z) + Z G(Z) & c_k Z^{k-1} G\left(\frac{1}{Z}\right) + Z^k F\left(\frac{1}{Z}\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8-3-3)$$

检查一下这个乘积, 我们看到在  $k-1$  变成  $k$  时, 标量因子是属于同一形式的。矩阵元素22也能够从元素11得到, 只须把  $Z$  代以  $1/Z$ , 再乘上  $Z^k$ 。同样地, 元素21是从元素12得到的; 所以, (8-3-2) 的确表示了一般形式。  $k$  阶多项式  $F(Z)$  和  $G(Z)$  是用下面的方法建立的〔见(8-3-3)右边的第一纵列〕

$$F_k(Z) = F_{k-1}(Z) + c_k Z G_{k-1}(Z) \quad (8-3-4a)$$

$$G_k(Z) = c_k F_{k-1}(Z) + Z G_{k-1}(Z) \quad (8-3-4b)$$

检查 (8-3-4), 我们能够看到  $F$  和  $G$  的某些细节。从 (8-3-4a) 我们看到,  $F(Z)$  中打头的系数  $f_0$  不随  $k$  而变, 它总是  $(f_0)_{k=1}$ 。知道了这一点, 再从 (8-3-4b), 我们看到  $(g_0)_k = c_k$ 。还有, 知道了  $F(Z)$  和  $G(Z)$  关于  $Z$  的次数相同, 我们看到, (8-3-4b) 意味着  $G(Z)$  的最高次项的系数, 譬如说是  $(g_k)_k$ , 不随  $k$  而变, 因此, 它和  $c_1$  的开始值相等。最后, 明白了这些和 (8-3-4a), 我们可推断  $F(Z)$  里的最高次项的系数将总是  $c_1 c_k$ , 所以, 总之

$$F(Z) = 1 + f_1 Z + f_2 Z^2 + \dots + c_1 c_k Z^{k-1} \quad (8-3-5a)$$



$$G(Z) = c_k + g_1 Z + g_2 Z^2 + \dots + c_1 Z^{k-1} \quad (8-3-5b)$$

在 (8-3-5) 中注意到 [这可从 (8-3-4) 的递推关系中证明],  $F$  的系数包含  $c$  的偶次幂,  $G$  则包含  $c$  的奇次幂。这就是说, 如果所有的  $c$  改变符号,  $G$  也要改变符号, 但  $F$  不变。

多项式  $F(Z)$  和  $G(Z)$  并非独立的, 他们之间存在着一种与能流相似的关系。由 (8-3-4) 做代换, 可直接证实

$$\left[ F(Z)F\left(\frac{1}{Z}\right) - G(Z)G\left(\frac{1}{Z}\right) \right]_k = (1 - c_k^2)$$

$$\left[ F(Z)F\left(\frac{1}{Z}\right) - G(Z)G\left(\frac{1}{Z}\right) \right]_{k-1} \quad (8-3-6)$$

由于  $F_1(Z) = 1$  及  $G_1(Z) = c_1$ , 反复应用 (8-3-6) 得出

$$\begin{aligned} \left[ F(Z)F\left(\frac{1}{Z}\right) - G(Z)G\left(\frac{1}{Z}\right) \right]_k &= \prod_1^k (1 - c_k^2) \\ &= \prod_1^k t'/t \quad (8-3-7) \end{aligned}$$

方程 (8-3-7) 是个意外的方程, 因为在其左边有两个谱,  $f_t$  的谱和  $g_t$  的谱, 可是在右边是一个正的与频率无关的常数。由于从这里得知  $f_t$  的谱大于  $g_t$  的谱, 我们可把“加渣滓”的定理应用到最小相位的子波上, 从 (8-3-4a) 推断, 并因得知  $|c_k| < 1$ , 如果  $F_{k-1}(Z)$  是最小相位, 则  $F_k(Z)$  也是最小相位。因为  $F_1(Z) = 1$  是最小相位, 我们看到, 所有的  $F_k(Z)$  都是最小相位。因为  $F(Z)$  是最小相位, 于是  $F(Z)$

可以从它的谱  $F(Z)$   $F(1/Z)$  或  $g_t$  的谱 (以及单个的数  $\pi t'$ ) 来计算。不过我们不能从  $F$  求得  $G$ 。我们举个例子。

令叠合的层夹在两个半空间之中 (见图8-9), 从下面来

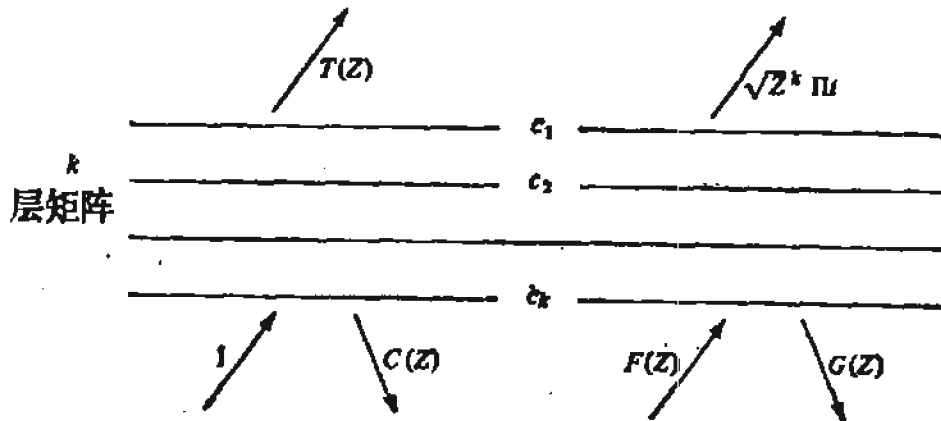


图 8-9

在两个半空间中通过叠合层的波的人射、反射及透射

了一个脉冲入射, 散射回来的波叫做  $C(Z)$ , 透射波叫做  $T(Z)$ 。

数学上, 我们用下面的方程来描述这情况

$$\begin{bmatrix} 1 \\ C(Z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{Z^k \Pi t}} \begin{bmatrix} F(Z) & Z^k G\left(\frac{1}{Z}\right) \\ G(Z) & Z^k F\left(\frac{1}{Z}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(Z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8-3-8)$$

求解 (8-3-8) 的第一个方程, 求得透射波  $T(Z)$

$$T(Z) = \frac{\sqrt{Z^k \Pi t}}{F(Z)} \quad (8-3-9)$$

把这结果引入 (8-3-8) 的第二个方程, 求得往回散射的波

$$C(Z) = \frac{G(Z)T(Z)}{\sqrt{Z^k \Pi t}} = \frac{G(Z)}{F(Z)} \quad (8-3-10)$$

$F(Z)$  是最小相位, 即  $C(Z)$  和  $T(Z)$  具有有限能量。因此,

(8-3-9) 和 (8-3-10) 的分母都不可能在单位圆内有零点。由于我们知道往回散射的波  $C(Z)$  比入射波包含的能量少，这是参考 (8-2-13) 而得出的。我们知道，通过

$$\frac{1 - C(Z)}{1 + C(Z)} = \frac{1 - G(Z)/F(Z)}{1 + G(Z)/F(Z)} \quad (8-3-11)$$

给出了一个正的实函数。现在让我们看看如何从观察到的散射波  $C(Z)$  来反推反射系数  $c_j$ ，参看图8-9，得出

$$\begin{bmatrix} 1 \\ C(Z) \end{bmatrix} = \frac{1}{t_k \sqrt{Z}} \begin{bmatrix} t & c_k Z \\ c_k & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_{k-1} \quad (8-3-12)$$

$C(Z)$  的第一个系数是  $c_k$  [这从物理方面是显而易见的，从 (8-3-5) 中也可看出]。这样，(8-3-12) 中的层矩阵就知道了。以层矩阵的逆遍乘 (8-3-12)，可得出  $U_{k-1}(Z)$  和  $D_{k-1}(Z)$ 。下一个反射系数  $c_{k-1}$  显见是  $d_0/u_0$ ，所以，我们可以一步步进行下去，定出所有的  $c_k$ 。

下面，让我们再研究一下反射地震学的几何问题，我们有

$$\begin{bmatrix} 0 \\ E(Z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{Z^k \Pi t}} \begin{bmatrix} F(Z) & Z^k G\left(\frac{1}{Z}\right) \\ G(Z) & Z^k F\left(\frac{1}{Z}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R \\ 1 + R \end{bmatrix} \quad (8-3-13)$$

从第一个方程，我们可以求解  $R(Z)$

$$R(Z) = + \frac{Z^k G(1/Z)}{F(Z) - Z^k G(1/Z)} \quad (8-3-14)$$

记

$$A(Z) = F(Z) - Z^k G\left(\frac{1}{Z}\right) \quad (8-3-15)$$

$A(Z)$  和  $F(Z)$  都是最小相位。(8-3-13) 的第二个方程给出了逸散的波, 为

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{Z^k F(1/Z) + [-G(Z) + Z^k F(1/Z)]R}{\sqrt{Z}^k \Pi t} \\ &= \frac{Z^k F(1/Z) [F(Z) - Z^k G(1/Z)] + [-G(Z) + Z^k F(1/Z)] Z^k G(1/Z)}{A(Z) \sqrt{Z}^k \Pi t} \end{aligned}$$

用 (8-3-7) 进行简化, 得出

$$E(Z) = \frac{\sqrt{Z}^k \Pi t'}{A(Z)} \quad (8-3-16)$$

其真实函数是

$$\begin{aligned} \frac{D-U}{D+U} &= \frac{1+R-(-R)}{1+R-R} = 1 + 2R(Z) \quad (8-3-17) \\ &= \frac{\text{垂直速度} = 1 + 2R}{\text{压力} = 1} \end{aligned}$$

如前所述, 用声学的术语对方程进行解释, 则  $Y(D-U)/(D+U)$  解释为垂直速度除以压力, 这称为“导纳”, 是阻抗的倒数。

至此, 我们已把由给出的反射系数计算波场的问题讲完了。下一节里, 我们要研究由已知的各种波去求反射系数这种反问题了。

### 练习

1. 在图8-9中, 令  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = -\frac{1}{2}$ , 及  $c_3 = \frac{1}{3}$ 。求

$T(Z)$  和  $C(Z)$  两多项式的比。

2. 对单一界面,有简单的关系  $t = 1 + c$ ,  $t' = 1 + c'$ , 及  $c = -c'$ 。对图8-9的一般化界面,有哪种类比关系呢?〔例如,证明  $1 - T(Z)T'(1/Z) = C(Z)C(1/Z)$ , 这是对  $1 - tt' = c^2$  的类比。〕

3. 证明:  $T(Z)$  和  $T'(Z)$  除一个标量因子的差别外,是同一波形。并推论多组不同叠合的层可以有相同的  $T(Z)$ 。

4. 设一个脉冲入射到一叠合层上,且已知反射波为  $C(Z)$ , 问第一层界面的反射系数是什么? 然后除掉第一个反射层,情况就有了变化,问在这种情况下,反射波(作为  $C$  的函数)应该是怎样的?

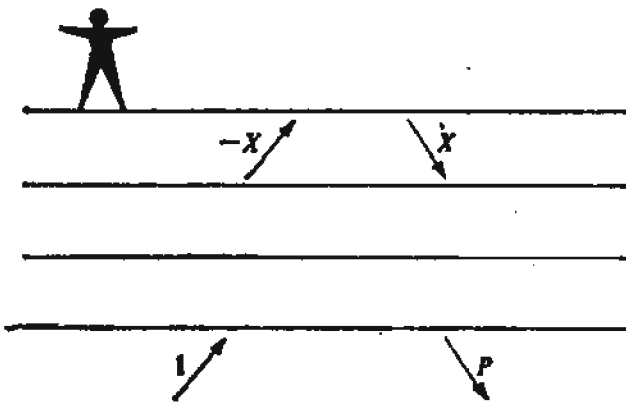


图 8-3-5

5. 设想地球是在一个半空间上的由若干层构成的一个模型。有一脉冲从下面入射上来(见图E 8-3-5)。给定  $F(Z)$  和  $G(Z)$ , 这是层矩阵乘积的两元素。求

解  $X$  和  $P$ , 用证明  $P(Z)\overline{P}(1/Z) = 1$  的方法来检查你的答案。 $X$  和  $E$  有什么关系呢? 这种关系表明了互易性原理, 即震源和接收器是可以互换的。

6. 证明  $1 + R(1/Z) + R(Z) = (\text{标量因子}) X(Z)X(1/Z)$ , 这说明我们可以把透射的地震波曲线作自相关, 以求出反射的地震波曲线。

7. 参阅图 E8-3-7, 请从  $R$  计算  $R'$ 。

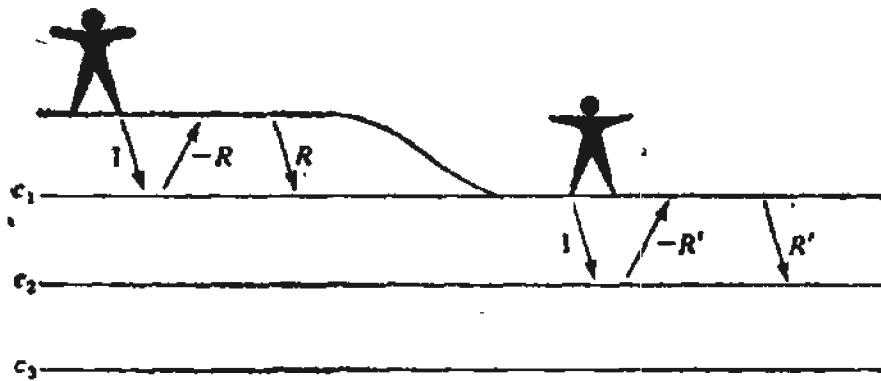


图 8-3-7

### 8-4 由波计算反射系数

解决这个问题，最好是由孔内兹 (Kunetz) 方程<sup>[31]</sup> (8-2-9) 出发

$$1 + R\left(\frac{1}{Z}\right) + R(Z) = \frac{Y_k}{Y_1} E\left(\frac{1}{Z}\right) E(Z) \quad (8-4-1)$$

我们还需要逸散波 (8-3-16) 的表达式

$$E(Z) = \frac{\sqrt{Z}^k \Pi t'}{A(Z)} \quad (8-4-2)$$

还要记得  $Y_k/Y_1 = \pi t/t'$ 。由此，(8-4-1) 变为

$$1 + R(Z) + R\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{\Pi t' t}{A(Z) A(1/Z)} \quad (8-4-3)$$

用  $A(Z)$  遍乘上式两边，得出

$$\left[1 + R(Z) + R\left(\frac{1}{Z}\right)\right] A(Z) = \frac{\Pi t' t}{A\left(\frac{1}{Z}\right)}$$

(8-4-4)

因为  $A(Z)$  是最小相位， $A(Z)$  可以写为  $1/B(Z)$  或

$A(1/Z) = 1/B(1/Z)$ 。从而，(8-4-4) 变为

$$\{1 + R(Z) + R(1/Z)\}A(Z) = (\Pi t' t) \left( 1 + \frac{b_1}{Z} + \frac{b_2}{Z^2} + \dots \right) \quad (8-4-5)$$

方程两端  $Z$  的零次幂及正幂的系数应该相等，我们得出一个三层模型的方程组，形如 ( $r_0 = 1$ )。

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_1 \\ r_3 & r_2 & r_1 & r_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ -c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi t' t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (8-4-6)$$

在 (8-4-6) 中，我们遇到了常见的陶布里兹矩阵。它一直是用做谱因子分解和预测时间序列的，注意， $-c_3$  是作为  $A(Z)$  的最高次系数插入到 (8-4-6) 里的。要证实这一点，只要用  $F(Z)$  和  $G(Z)$  表示  $A(Z)$ ，而  $F$  和  $G$  又通过  $c_k$  表示出来。考核一下陶布里兹联立方程 (8-4-6)，和解 (3-3-8) 的来文森方法，我们就可得知如何由波来计算反射系数了。

对 (8-4-6) 的头四个方程通常都想到如下处理：已知头三个反射脉冲  $r_1$ ， $r_2$ ，和  $r_3$ ，我们可以解这些方程，以求  $A$ ，随之可得出反射系数  $c_3$ 。知道了  $A$ ，(8-4-6) 中的第 5 个方程可用来计算  $r_4$ 。如果这个模型真的是一个三层的模型，事情就算做完了；如果不是这么回事，则应再出现一个反射系数  $c_4$ 。而  $c_4$  是在把 (8-4-6) 方程从 4 阶扩展到 5 阶

时能得到的。总之，给定了  $r_k$ ，用来文森递推方法准可求出反射系数  $c_k$ 。

现在，假定我们是从观察逸散的波  $E(Z)$  出发确定反射系数，方法可以是：用  $E(Z)$  的自相关形成  $1 + R(Z) + R(1/Z)$ ，之后，再用来文森递推去求这些反射系数。用这个方法唯一的缺点是由于  $E(Z)$  包含了无限多个系数，所以在实践中必须做截尾。改变一下做法可以避免截尾。已知  $E(Z)$ ，作多项式除法，可求得  $A(Z)$ 。来文森递推的中心内容在于以  $A_{k+1}(Z) = A_k(Z) - cZ^k A_k(1/Z)$  来建立  $A(Z)$ 。特别，从 (3-3-12)，得到

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}_3 - c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_1 \\ 1 \end{pmatrix}_3 \quad (8-4-7)$$

这说明了如何由  $A_2(Z)$  和  $c_3$  求出  $A_3(Z)$ 。从这里返算回去，我们先看到  $c_3$  是  $-a_3$ ，那么把 (8-4-7) 上下颠倒来写

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ 1 \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_1 \\ 1 \end{pmatrix}_3 - c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}_3 \quad (8-4-8)$$

其后，给 (8-4-7) 乘上  $1/(1 - c_3^2)$ ，把这乘积加到乘以  $c_3/(1 - c_3^2)$  的 (8-4-8) 上。注意到右边的上下倒置的矢量取消了，留下



$$\frac{1}{1-c_2^2} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \frac{c_2}{1-c_2^2} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ -a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8-4-9)$$

```

COMPLEX A,C,AL,BE, TOP, CONJG
C(1)=-1.; R(1)=1.; A(1)=1.; V(1)=1.
300 DO 310 I=1,N
310 C(I)=A(I)
DO 330 K=1,N
J=N-K+2
AL=1./(1.-C(J)*CONJG(C(J)))
BE=C(J)*AL
JH=(J+1)/2
DO 320 I=1,JH
TOP=AL*C(I)-BE*CONJG(C(J-I+1))
C(J-I+1)=AL*C(J-I+1)-BE*CONJG(C(I))
320 C(I)=TOP
330 C(J)=-BE/AL

```

图 8-10

从预报误差滤波器  $A(Z)$  计算反射系数  $c_k$  的程序。复值算法是任选的。

```

COMPLEX C,R,A,BOT, CONJG
C(1)=-1.; R(1)=1.; A(1)=1.; V(1)=1.
100 DO 120 J=2,N
A(J)=0.
R(J)=C(J)*V(J-1)
V(J)=V(J-1)*(1.-C(J)*CONJG(C(J)))
DO 110 I=2,J
110 R(J)=R(J)-A(I)*R(J-I+1)
JH=(J+1)/2
DO 120 I=1,JH
BOT=A(J-I+1)-C(J)*CONJG(A(I))
A(I)=A(I)-C(J)*CONJG(A(J-I+1))
120 A(J-I+1)=BOT

```

图 8-11

相应于图8-10程序的逆处理程序。从  $c$  中算出  $R$  和  $A$ 。

(8-4-9)方程是所期望的结果，它说明在得知  $c_{k+1}$  时，如何把  $A_{k+1}(Z)$  简化为  $A_k(Z)$ 。连续进行这种处理的程序见图8-10。从  $c$  求  $R$  和  $A$  的一个逆处理程序见图8-11。

最后，让我们看看如何处理随机震源的问题。图8-12表明了“天然地震几何描述”。这里，从下面入射的脉冲已和一个白光随机数序列  $W_t$  作了褶积。从而，所有于图8-12内分出的波，都是由脉冲

入射模型内相应的波与  $W_t$  的褶积所给出的。现在假定我们已知顶层的波  $D = -U = XW$ ，希望考虑一下它朝下延拓的

情形。我们有层矩阵

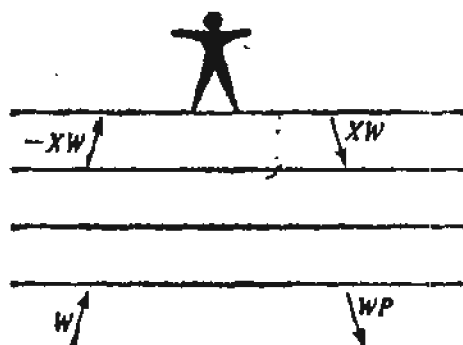


图 8-12

从下面来的白光入射的天然地震几何描述。在顶层，波的总和为零，这表示在自由的地表面压力为零。上行波和下行波的差是所观察到的速度的垂直分量。

$$\begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{Z}t_k} \begin{bmatrix} 1 & cZ \\ c & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_k \quad (8-4-10)$$

这可改写为

$$\begin{bmatrix} -U \\ D \end{bmatrix}_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{Z}t_k} \begin{bmatrix} 1 & -cZ \\ -c & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -U \\ D \end{bmatrix}_k \quad (8-4-11)$$

伯格预测误差可写为下列形式

$$\begin{bmatrix} e^+ \\ e^- \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ -c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^+ \\ e^- \end{bmatrix}_k \quad (8-4-12)$$

这种形式使其（除了一个标量因子的区别外）等效于朝下延拓着的地面波形。剩下的问题是，伯格对反射系数的估计，即

$$\hat{c}_k = \frac{2\sum_t e_k^+ e_k^-}{\sum_t e_k^+ e_k^+ + e_k^- e_k^-} \quad (8-4-13)$$

是否就可归结为，对物理模型里反射系数  $c_k$  的估计了。要了解伯格的  $\hat{c}_k$  和来文森递推中出现的  $c_k$  有何关系，我们来定义一下  $f^+$  和  $f^-$ ，在  $k=2$  时

$$\begin{bmatrix} f^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & & & & & \\ x_1 & x_0 & & & & \\ x_2 & x_1 & x_0 & & & \\ & x_2 & x_1 & & & \\ & & & x_2 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} f^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & & & & & \\ x_1 & x_0 & & & & \\ x_2 & x_1 & x_0 & & & \\ & x_2 & x_1 & & & \\ & & & x_2 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(8-4-14)

下面作其点积

$$(f^-)^T f^+ = [0 \ a_1 \ 1] \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & & & \\ & x_0 & x_1 & x_2 & & \\ & & x_0 & x_1 & x_2 & \\ & & & x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 & x_0 \\ x_2 & x_1 & x_0 \\ & x_2 & x_1 \\ & & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \ a_1 \ 1] \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ r_1 & r_0 & r_1 \\ r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8-4-15)$$

现在利用  $(1, a_1)$  满足  $2 \times 2$  系统这事实。按照来文森递推, (8-4-15) 可写为

$$(f^-)^T f^+ = [0 \ a_1 \ 1] \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ e \end{bmatrix} = e \quad (8-4-16)$$

同样, 我们可推出  $f^+ \cdot f^+ = f^- \cdot f^- = v$ , 因此, 反射系数的来文森递推法可以写为

$$\epsilon = \frac{2(f^+ \cdot f^-)}{(f^+ \cdot f^+) + (f^- \cdot f^-)} = \frac{2e}{2v} \quad (8-4-17)$$

伯格处理方法和来文森处理方法之不同, 在于伯格略去了 (8-4-14) 的两端置零影响的一些项。替代 (8-4-14) 的,

是

$$\begin{bmatrix} e^+ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_0 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad \text{及} \quad \begin{bmatrix} e^- \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_0 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8-4-18)$$

对于一个足够长的数据序列来说，伯格方法和来文森方法处理的效果差不多。但对于有限步数的数据采样，我们则要挑选一下。用(8-4-14)来文森方法相当于假定数据采样在所观察这间隔的范围之外为零了。在大多数应用中，这样做是不对的。所以伯格方法通常更为可取。

### 练习

1. 一个脉冲及反射地震波曲线的第一部分，即  $1 + 2R(Z)$  是  $1 + 2(Z/4 + Z^3/16 + Z^5/4 + \dots)$ 。问：前三个反射系数是什么？假定不再有更多的反射界面了，问反射地震波曲线里的下一个点是什么？

2. 在一个半空间上面若干层的表面观察到一个地震记录  $X(Z) = 1/(1 - 0.1Z + 0.9Z^2)$ 。拟出其时间函数，指出其共振频率及衰变时间。如果  $X(Z)$  是出于在诸层下面的半空间一个未知大小的脉冲震源的话，试求其反射系数。

3. 在半空间深处的一个震源  $b_0 + b_1$  产生一地震记录  $B(Z)X(Z) = 1 - Z + Z^2/2 - Z^3/2 + Z^4/4 - Z^5/4 + Z^6/8 - Z^7/8 + \dots$ ，问其层构造和震源的时间函数是什么？

## 第9章 层状介质的数学物理问题

对于层状介质的研究，所涉及的物理对象差异甚大，诸如：声学、电磁波、磁静力学、地心引力的弹性球面共振、热流、气体扩散、抗体内的电流、地震波、水波、大气重力波，等等。这些不同的物理对象之间，在数学上却有许多共同处。我们在这一章将提出层状介质的一般性理论，并只就声学方面叙述一些细节。

所谓层状介质，是指在这种介质里，物质的性质、压缩性能、导体性能、密度，等等，都只是空间坐标的一个函数。通常采用笛卡儿坐标，不过，在地球标度上研究地球物理时，也可能用球面坐标。

### 9-1 由物理问题归结成数学问题

一般可分为下列几个步骤。

第一步：

第一步是把与研究的问题有关的一切古典物理的基本偏微分方程都罗列出来。当然，可以从一阶微商方程导出的含有二阶空间微商的方程无须再列出来，只要写出一阶微商方程就可以了。应把矢量或矩阵方程的每个分量写出来。

在声学上，梯度压力  $p$ （译注：本书中，不严格区分压力与压强，这里  $p$  表示压强）会引起质量密度  $\rho$  那么大的加速。为了方便，我们把运动限制在  $x, z$  平面上。令  $u$  和  $w$  代表速度的  $x$  和  $z$  分量，得出

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (9-1-1)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (9-1-2)$$

声学里另一个重要方程，是表明速度的散度乘以不可压缩率  $K$  等于压力下降率的方程

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + s(x, z, t) \quad (9-1-3)$$

在 (9-1-3) 中，我们加了一个压力源  $s$ ，这是要加以说明的。量  $s$  象是一次爆炸化学能的源；因此，这源除了一个点之外，任何其它位置上都等于零。分布开的源常常也是很有意思的，例如，地球热传导模型中的有放射性能的岩石，就属于这种情况。更一般一些，我们也可以把动量源加进 (9-1-1) 或 (9-1-2) 式中，不过，只在 (9-1-3) 里引进一个源才好充分地例证一些基本原理。

第二步：

把波扰动各变元当做未知，物质的性质当作已知。这样就有三个方程式和  $u, w, p$  三个未知数。我们把  $K, \rho$  和  $s$  当作已知。注意，各方程式对于未知数都是线性的。现在我们作一层理假定：即假定  $K$  和  $\rho$  只是深度  $z$  的函数，它们对于  $x$  来说是常数。因为这些线性方程的系数对于  $x$  和  $t$  是常数，所以我们总可以得到用  $x$  和  $t$  表示的正弦解。由于系数  $K$  和  $\rho$  依赖于  $z$  的关系是任意的，我们不知道对于  $z$  坐标能得到怎样的解。这又把我们引向第三步。

第三步：

对具有常系数的时间和空间坐标作付里叶变换，换句话

说，在 (9-1-1)，(9-1-2) 和 (9-1-3) 中做下列代换

$$\begin{pmatrix} u(x, z, t) \\ w(x, z, t) \\ p(x, z, t) \\ s(x, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(k, z, \omega) \\ W(k, z, \omega) \\ P(k, z, \omega) \\ S(k, z, \omega) \end{pmatrix} e^{-i\omega t + ik_x x} \quad (9-1-4)$$

代入之后，消去指数，得到

$$-i\omega\rho(z)U^{\textcircled{1}} = -ik_x P \quad (9-1-5a)$$

$$-i\omega\rho(z)W^{\textcircled{1}} = -\frac{\partial P}{\partial z} \quad (9-1-5b)$$

$$-i\omega P = -K(z)\left(ik_x U + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + S \quad (9-1-5c)$$

第四步：

用代数方法消去未知数。(9-1-5) 中，只见有  $\partial P/\partial z$  和  $\partial W/\partial z$  的项，未见  $\partial U/\partial z$ 。这意味着， $U$  是一个能够用纯代数方法来消去的变元。我们把 (9-1-5a) 代入 (9-1-5c) 来做到这一点。

第五步：

把  $\partial/\partial z$  项移到左边，把所有其它项都移到右边，把各项排成一简练的矩阵形式，得

$$\frac{\partial P}{\partial z} = i\omega\rho W$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = i\left(\frac{\omega}{K} - \frac{k_x^2}{\omega\rho}\right)P + \frac{S}{K}$$

---

① 原文等号左边误为  $-i\omega\rho(z)$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 0 & \omega\rho \\ \frac{\omega}{K} & -\frac{k_x^2}{\omega\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{S}{K} \end{bmatrix} \quad (9-1-6)$$

第六步:

无论从那个物理问题出发, 都可归结为一个矩阵形式的一阶微分方程

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{s} \quad (9-1-7)$$

其中  $\mathbf{x}$  是包含所研究的场变元的一个矢量,  $\mathbf{A}$  是依赖于时间频率和空间频率, 且依赖于物质性质的一个矩阵,  $\mathbf{s}$  是源的矢量函数 (可能没有这一项)。

在我们考查解 (9-1-7) 的方法之前, 我们能够立即推断出, 在一个无源场中, 场变元  $\mathbf{x}$  是比物质性质更平滑的函数。要了解这一点, 可考虑两个相接触的均匀层。在接触处,  $\mathbf{A}$  矩阵具有阶梯函数的间断性。现在让我们看看波场  $\mathbf{x}$  是否也能有阶梯函数的间断性。很明显, 它们不能有。因为  $\mathbf{x}$  里面的一个阶梯间断性将蕴含着  $d\mathbf{x}/dz = \infty$ , 而 (9-1-7) 是在一个无源区域里, 这说明  $d\mathbf{x}/dz = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , 而  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{x}$  两个都假定是有限的。这并不意味着所有的场变元总是平滑的。在“第四步”中被消去的变元常常可能在层的边缘上是间断的。

### 练习

1. 对于热传导方程, (9-1-7) 是什么样的形式?  
包含放射性源 [提示: 请看 (10-1-1) 和 (10-1-2) 方程]
2. 用马克斯威尔 (Maxwell) 方程,  $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu\mathbf{H}$ ,



$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \mathbf{E}$ , 及欧姆定律,  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , 其中  $\sigma$  是电导率, 置  $\partial/\partial y = 0$ , 导出 (9-1-7)。

3. 静电学里, 电离层的电场可以从电位  $\nabla \phi = -\mathbf{E}$  导电, 电流的散度等于零  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 。欧姆定律, 由于风 (由于离子和电子穿越地球磁场的微分曳力而成的一个电流源), 须必多出一项,  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \tau \mathbf{V}$ 。假定已知道  $\mathbf{V}$ 。假定  $\sigma$  和  $\tau$  都是标量, 问 (9-1-7) 是什么形式? 如果  $\sigma$  和  $\tau$  都是矩阵 (并假定, 希望有逆的矩阵都有逆), 请说明如何进行计算?

4. 在静磁学里, (旋度)  $\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J}$  及 (散度)  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , 而  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 。若  $\mathbf{J}$  为已知, (9-1-7) 的形式怎样?

5. 这个习题说明非线性问题的线性化过程。关于在分层、多风的大气里的声波, 我们可用尝试解法

$$\begin{bmatrix} P \\ U \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P} \\ \bar{U}(z) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{P}(z) \\ \tilde{U}(z) \\ \tilde{W}(z) \end{bmatrix} e^{-i\omega t + ik_x x}$$

请把这几个偏微分方程简化为一个矩阵常微分方程。提示: 水平加速项是

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial z} w \end{aligned}$$

垂直加速项有类似的项。舍去  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{U}$  和  $\tilde{W}$  的二阶项。

6. 热流中得出二个方程: 第一个方程,  $(H_x, H_z)$  等于传导率  $\sigma$  乘以负的温度梯度  $(\partial_x, \partial_z)T$ 。第二个方程是,

温度对于时间微商乘以热容  $C$  等于负的热流的散度  $\partial_x H_x + \partial_z H_z$ 。插入尝试解

$$\begin{pmatrix} T \\ H_x \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{T}(z) \\ 0 \\ \bar{H}_z(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}(z) \\ \tilde{H}_x(z) \\ \tilde{H}_z(z) \end{pmatrix} e^{-i\omega t + ik_x x}$$

(a) 首先, 假定  $\tilde{T}$  和  $\tilde{H}$  为零, 导出  $\bar{T}$  和  $\bar{H}$  的稳恒态方程。

(b) 假定  $\bar{T}$  和  $\bar{H}$  满足 (a) 部分, 求  $\tilde{T}$  和  $\tilde{H}$  的方程。

(c) 假定热容和传导率与温度有线性关系, 即

$$\sigma = \sigma_0(z) + \sigma_1(z)T$$

$$c = c_0(z) + c_1(z)T$$

再作 (a) 和 (b)。应舍去  $\tilde{T}$  和  $\tilde{H}$  里的平方项。

7. 考虑一个可压缩的液体球, 在它自己的重量引力作用下产生径向的脉动, 问 (9-1-6) 的形式怎样?

提示:  $\rho \ddot{\mathbf{V}} = \nabla p - \rho g$  动量

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$
 质量

$$p + K \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$
 状态

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = 4\pi\gamma\rho$$
 重力

## 9-2 数值积分矩阵

微分方程描述的是, 一个点的场变元与邻近各点的场变元的关系。积分矩阵描述的则是, 在层状的物质中, 一个深度的场变元与其它深度上的场变元的关系。积分矩阵也可看做是对矩阵微分方程 (9-1-7) 积分的结果。首先, 我们将说明如何用数值方法求得 (9-1-7) 的积分矩阵, 即求解密

度和压缩率随深度变化的问题。然后，我们再回来对恒定物性的特殊情况，求得解析解。现有

$$\frac{\partial X}{\partial z} \approx \frac{X(z + \Delta z) - X(z)}{\Delta z} \approx A(z)X(z) + S(z)$$

或

$$X(z + \Delta z) = (I + A\Delta z)X(z) + S(z)\Delta z \quad (9-2-1)$$

若对某一特定的  $z$  给出了  $X$ ，显然，(9-2-1) 可以用来对任一  $z$  递推求出其对应的  $X$ 。为简单起见，我们可以取  $\Delta z = 1$ ，并以下标来表示  $z$  坐标。将  $[I + A(z)\Delta z]$  记为  $Q(z)$ 。则 (9-2-1) 成为

$$X_{k+1} = Q_k X_k + S_k$$

或

$$X_1 = Q_0 X_0 + S_0$$

因此

$$\begin{aligned} X_2 &= Q_1(Q_0 X_0 + S_0) + S_1 \\ &= Q_1 Q_0 X_0 + Q_1 S_0 + S_1 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} X_3 &= Q_2(Q_1 Q_0 X_0 + Q_1 S_0 + S_1) + S_2 \\ &= Q_2 Q_1 Q_0 X_0 + Q_2(Q_1 S_0 + S_1) + S_2 \end{aligned}$$

同样

$$X_4 = M X_0 + T \quad (9-2-2)$$

所以，一般有一个数值上完全确定的矩阵  $M$ （称为积分矩阵）及一个矢量  $T$ ，矢量  $T$  通过下式把在顶层的场变元与底层的场变元联系起来

$$X_{z\text{顶}} = M X_{z\text{底}} + T \quad (9-2-3)$$

各种物理问题在不同边界条件下以不同方式呈现出来。拿前

面讨论过的声学问题来说， $X$  就是一个含有压力和垂直位移二个分量的矢量。这些在层理介质的顶部和底部开始都是不知道的。由此，(9-2-3) 表示了含有四个未知数的两个方程，只有当引入两个边界条件时，才能得出这问题的解。如果我们讨论大洋上的声波，(简化的) 边界条件就是把水平面的压力定为 0，把大洋底上的垂直位移也定为 0。这样，(9-2-3) 的边界条件就是两个方程和两个未知数。从而，就能够解出水平面位移和底部压力了。由此，任何地方的压力与位移也都可确定了。适当地确定边界条件常常是解决问题的关键；在下一节中，我们还要针对其它一些问题再讨论这件事。

如果物质的各部分具有恒定物性，又没包含源，那就可能求出积分矩阵的解析式。穿越这种恒定物性层的一个积分矩阵，可恰如其分地，称为“层矩阵”。用直接代入法可以证实

$$X_z = e^{[A(z-z_0)]} X_{z_0} \quad (9-2-4)$$

是  $(\partial/\partial z)X = AX$  的解，其中

$$e^{A(z-z_0)} = 1 + A(z-z_0) + \frac{A^2(z-z_0)^2}{2!} + \dots \quad (9-2-5)$$

在空间的一个区域中， $A$  对  $z$  是常数。因此， $e^{A(z-z_0)}$  就是所求的积分矩阵。矩阵指数能够通过(9-2-2)或(9-2-5)，或第 5 章中所述西勒维斯脱数值方法计算出来。下一节中，我们可以看到，西勒维斯脱定理可直接导出上行波和下行波的概念。

## 练习

1. 对于改进了的中心差分逼近,  $Q_k$  等于什么?

$$X(z + \Delta z) - X(z) = \frac{A[X(z + \Delta z) + X(z)]}{2}$$

## 9-3 上行波和下行波

我们看到过许许多多的例子, 说明层理的无源介质中的物理问题都可归结为一个微分方程

$$\frac{d}{dz} X = AX \quad (9-3-1)$$

其中  $X$  是物理变元的矢量,  $A$  是依赖于  $z$  的矩阵, 如果物性随  $z$  而变化的话。规定矢量  $V$  是物理变元  $X$  的矢量乘以方阵  $R$

$$V = RX \quad (9-3-2)$$

得到的一组新变元。其中  $R$  是矩阵  $A$  的行特征向量的矩阵。 $R$  的逆, 是  $A$  的列特征向量组成的矩阵  $C$ 。以  $C$  左乘 (9-3-2), 利用  $CR = I$ , 我们得 (9-3-2) 的逆关系式

$$X = CV \quad (9-3-3)$$

这对从新的变元  $V$  去求物理变元  $X$  是有用的。

把 (9-3-3) 代入 (9-3-1), 得

$$(CV)_z = ACV$$

$$CV_z = ACV - C_z V$$

以  $R$  左乘, 利用  $RC = I$ , 得出

$$V_z = (RAC)V - RC_z V \quad (9-3-4)$$

因为我们曾假定  $R$  和  $C$  分别是  $A$  的行特征向量矩阵和列特征向量矩阵, 所以我们就可用特征值的对角阵  $\Lambda$  来替换

RAC, 即

$$\mathbf{V}_z = \mathbf{AV} - \mathbf{RC}_z\mathbf{V} \quad (9-3-5)$$

于是在均匀物质的物理空间的任一区域里, A (从而 C) 与  $z$  无关, (9-3-5) 则化为

$$\frac{d}{dz}\mathbf{V} = \mathbf{AV} \quad (9-3-6)$$

然而, (9-3-6) 内的唯一矩阵是个对角阵, 所以, 求解矢量  $\mathbf{V}$  中各个变元的问题分离成了分别解每一个分量的问题了。在研究波的传播问题时, 我们将看到, 把  $\mathbf{V}$  的分量叫做上行波和下行波变元是非常恰当的。这些变元在均匀区域里分别朝上、朝下流动, 彼此没有相互作用。让我们举个例子。

在 9-1 节, 我们曾推论出: 在一个无源区域中声学问题的矩阵一阶微分方程有以下形式

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ia^2 \\ ib^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} \quad (9-3-7)$$

其中

$$a^2 = \omega\rho \quad (9-3-8)$$

$$b^2 = \frac{\omega}{K} - \frac{k_x^2}{\omega\rho} \quad (9-3-9)$$

(9-3-7) 矩阵的列特征向量矩阵  $\mathbf{C}$  和行特征向量矩阵  $\mathbf{R}$  为 (易于验证)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{b}{a} & \frac{b}{a} \end{bmatrix} \quad (9-3-10)$$

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{b} \\ 1 & \frac{a}{b} \end{pmatrix} \quad (9-3-11)$$

而且这些向量是标准化了的, 即  $RC = CR = I$  且

$$\Lambda = RAC = \begin{pmatrix} -iab & 0 \\ 0 & +iab \end{pmatrix}$$

下行波变元  $D$  对应于特征值  $iab$ , 而上行波变元  $U$  对应于  $-iab$ 。我们定义上行波和下行波为

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{b} \\ 1 & \frac{a}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ W \end{pmatrix} \quad (9-3-12a)$$

当然, 给行特征向量乘上一个任意的标量因子, 而又让相应的列特征向量除以这个标量因子, 上面的讨论仍然正确。这意味着, (9-3-12a) 给出的定义不是唯一的。在这种情况下, 出现的标量因子对上行波和下行波给出  $P$  的物理量纲。下面的逆关系式, 可从  $U$  和  $D$  求得物理变元  $P$  和  $W$

$$\begin{pmatrix} P \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{b}{a} & \frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix} \quad (9-3-12b)$$

从这个式子看出压力  $P$  是下行波加上行波, 垂直速度是  $b/a$  乘以它们的差。描述  $U$  和  $D$  传播的方程 (9-3-5) 现在成了

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iab & 0 \\ 0 & iab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix} -$$

$$\frac{1}{2} \frac{(b/a)_z}{b/a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix} \quad (9-3-13)$$

若在一空间区域里  $b/a$  不依赖于  $Z$ ，则只为一简单的非耦合方程

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -iab & 0 \\ 0 & iab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix} \quad (9-3-14)$$

严格地讲，为了证明将  $U$  和  $D$  如上面所讲的那样定义为上行波和下行波是正确的，我们要确信下行解  $D$  具有如下形式

$$d(z, t) = e^{-i\omega t + ik_z z} \quad (9-3-15)$$

其中， $\omega$  和  $k_z$  的符号必须相同，这样，就可在  $z$  和  $t$  都上升时，仍保持着常数相位（对于  $U$ ， $\omega$  和  $k_z$  的符号必须相反）。换句话说， $k_z = ab$  一定要取  $\omega$  的符号。要看到这一点，我们取 (9-3-8) 和 (9-3-9) 乘积的平方根

$$k_z = ab = \omega \left( \frac{\rho}{K} - \frac{k_x^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \quad (9-3-16)$$

对垂直传播的波，有  $k_x = 0$ ，故  $k_z = ab$  化为  $k_z = \omega (\rho/K)^{1/2}$ 。把这个值代入 (9-3-15) 可看到，如果  $z/t = (K/\rho)^{1/2}$ ，指数的相位角便是常数。这就清楚了，物质内部速度是由下式给出的

$$v = \left( \frac{K}{\rho} \right)^{1/2} \quad (9-3-17)$$

参看图 9-1 的说明，在垂线和射线间的角  $\theta$  的正弦为



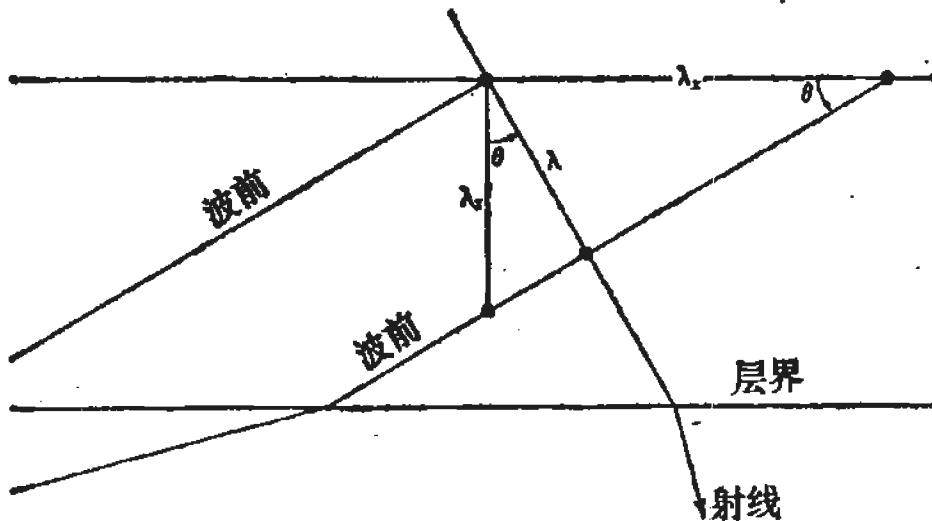


图 9-1

一层里面的射线和波前。在  $X$  轴上看到的波长  $\lambda_x$  和在  $Z$  轴上看到的波长  $\lambda_z$  两个都比沿着射线看到的波长  $\lambda$  要大些。很清楚,  $\lambda/\lambda_x = \sin\theta$  和  $\lambda/\lambda_z = \cos\theta$ , 所以空间频率  $k_x = 2\pi/\lambda_x$  和  $k_z = 2\pi/\lambda_z$  满足  $k_x^2 + k_z^2 = (2\pi/\lambda)^2 = \omega^2/v^2$ , 这个关系式, 除了表示直角三角形边的关系 (因为  $\sin\theta = k_x v/\omega$ ) 之外, 还是波动方程的付里叶变换。施耐尔 (Snell) 定律:  $(\sin\theta)/v$  从一层到另一层是相等的, 这等于说,  $k/\omega$  在每一层是相同的。空间频率  $k_x$  在每一层皆为相同的常数这一假定, 对于在层间界面上满足连续的条件是带本质性的。

$$\sin\theta = \frac{k_x v}{\omega} \quad (9-3-18)$$

把 (9-3-17) 和 (9-3-18) 代入 (9-3-16), 得

$$k_z = ab = \frac{\omega}{v} \cos\theta \quad (9-3-19)$$

时间函数 (9-3-15) 是复值的。要求得实的时间函数, (9-3-15) 式必须累加起来或积分起来, 以包括正的和负的频率。其次, 正如我们在有关时间序列分析的各章里所见的, 我们还必须有  $D(\omega) = \overline{D(-\omega)}$ 。

数量  $b/a$  就是表示物质的特性的导纳  $Y$ 。(9-3-9) 与

(9-3-8) 相除后开平方, 得

$$Y = \frac{b}{a} = \frac{(1 - v^2 k_x^2 / \omega^2)^{1/2}}{\rho v} \quad (9-3-20)$$

$$Y = \frac{b}{a} = \frac{\cos \theta}{\rho v} \quad (9-3-21)$$

$$I = \frac{a}{b} = \frac{\rho v}{\cos \theta} \quad (9-3-22)$$

我们现在要验证阻抗的这个定义和前一章中曾给出的定义是相同的。为此, 我们可仔细看一下跨越一层的那个积分矩阵  $\exp[A_1(z_2 - z_1)] = \exp(A\Delta z)$  (译注:  $\exp[A]$  即  $e^A$ )。据根西勒维斯脱定理, 对此积分阵矩, 我们有

$$\exp(A\Delta z) = C \begin{bmatrix} e^{-ik_z \Delta z} & 0 \\ 0 & e^{+ik_z \Delta z} \end{bmatrix} R \quad (9-3-23)$$

此积分阵矩把层的顶部  $z_1$  的波变元与其底部  $z_2$  的波变元联系起来。因此, (9-3-23) 能使我们写出

$$\begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix}_2 = C_1 \exp(\Lambda_1 \Delta z) R_1 \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix}_1 \quad (9-3-24)$$

方程 (9-3-24) 有一个简单的解释, 从它的右边开始, 我们把  $R_1$  乘入  $P$  和  $W$  变元的乘积解释为上行变元和下行变元的一种转换。然后, 与  $\exp(\Lambda_1 \Delta z)$  相乘, 这样穿越了这一层, 再与  $C_1$  相乘又反转换成  $P$  和  $W$  变元, 它们继续穿越一界面。以  $R_2$  遍乘 (9-3-24) 且注意到 (9-3-11) 和 (9-3-12), 得

$$\begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_2 = R_2 C_1 \exp(\Lambda \Delta z) \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_1 \quad (9-3-25)$$

在 (9-3-25) 中, 和前一章中所做的一样, 给正在界面下面的上行波和下行波下了定义。由于形式相同, 我们应能认出这矩阵, 它是

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{Y_2} \\ 1 & \frac{1}{Y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -Y_1 & Y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-iab\Delta z} & 0 \\ 0 & e^{iab\Delta z} \end{bmatrix} \quad (9-3-26)$$

定义  $Z$  变换变元

$$Z = \exp\left(\frac{2i\omega\Delta z}{v\cos\theta}\right)$$

现在我们可得出, 穿越这层的旅行时是  $\Delta t = \Delta z/v\cos\theta$  层矩阵 (9-3-26) 是

$$\frac{Y_1 + Y_2}{2Y_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{Y_2 - Y_1}{Y_2 + Y_1} \\ \frac{Y_2 - Y_1}{Y_2 + Y_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^{-1/2} & 0 \\ 0 & Z^{1/2} \end{bmatrix} \quad (9-3-27)$$

这可以与形如 (8-2-4) 的矩阵做比较

$$\frac{1}{t} \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^{-1/2} & 0 \\ 0 & Z^{1/2} \end{bmatrix}$$

由此看出, 定义  $Y = b/a$  已导致大家熟悉的反射系数的定义了

$$c = \frac{Y_2 - Y_1}{Y_2 + Y_1} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}$$

$$= \frac{\rho_1 v_1 / \cos \theta_1 - \rho_2 v_2 / \cos \theta_2}{\rho_1 v_1 / \cos \theta_1 + \rho_2 v_2 / \cos \theta_2} \quad (9-3-28)$$

### 练习

1. 给特征向量重新下定义，以使  $W = D + U$  和  $P = (D - U)/Y$ 。如果我们把  $t = 1 + c$  认为是垂直速度标准化变元，而不象在第 8 章中那样认为是压力变元，这种变换就会是有用的。请推论本节中所有方程的变化。

2. 用  $a$ 、 $b$  及层的厚度  $h$  写出穿越一层的积分矩阵。

### 9-4 源与接收器的互易性

互易性是说源与接收器（在某种条件下）可以互换位置，且可以观察到同样的波形。这个原理用在计算上是有好处的，它也可用来简化数据的采集。这个原理应用于具有复杂非均匀性的地壳时，是很有意义的。互易原理真确有效的主要根据在于：能量沿着一给定射线向前传播，在两个不同方向上是完全同等的。在任一条路径上，能量以同样速率同样衰减进行。这对一般类型的波都是正确的。

还需要稍微多说几句，如果所有的波是具有标量震源及标量接收器的标量现象，例如，声学的压缩波带有爆炸震源及对压缩敏感的接收器，就是这样。当源及接收器是运动的膜片时，这种情形就较复杂了，因为它们的定位非常重要，源和接收器的方向性质常被认为是辐射式的。要应用互易性原理，就必须把辐射型式看作是隶属于介质的，而不是隶属于源和接收器的。这样，当说到源和接收器互换时，互换的



(9-4-3) 的第一行和最后一行需要专门做一点注释。量  $I_0$  和  $I_n$  称为阻抗。当它们为零时，我们得到零压力边端条件；如果它们是无穷大，我们得到零运动边端条件。

有了矩阵 (9-4-3)，要从这里得到的唯一东西，是看出这个矩阵的确是个对称阵（即使  $\rho$  和  $K^{-1}$  是  $x$  的函数也罢）。在练习中，也表明，对称的矩阵也可在二维问题中得到。矩阵成为对称的，一方面是由于声的物理性能决定的，另一方面是由于作者精心设计的结果。要说明在其它情况下互易性也是正确的，还需仔细地做些设计。互易性的重要性在于 (9-4-3) 矩阵是对称的，从而，其逆矩阵也是对称的。把 (9-4-3) 自左边遍乘以其逆矩阵，得到的答案是在外部激发条件下矩阵乘法的一个结果

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ u_0 \\ p_1 \\ u_1 \\ p_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & A & B & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & C & D & \cdot & \cdot \\ A & C & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B & D & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ F_0 \\ V_1 \\ F_1 \\ V_2 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (9-4-4)$$

字母  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和  $D$  指出了矩阵 (9-4-4) 的对称性。现在假如除了在一个端点外，所有外部源都消失了，而在这个端点上有单位强度的声源  $V_0 = 1$ ，那么，根据 (9-4-4)，中间  $p_1$  上的压力便等于  $A$ 。假如在第二个试验中，除了中间声源  $V_1 = 1$  之外，所有外部震源都消失了，那么，根据 (9-4-4)，端点的压力响应  $p_0$  也等于  $A$ ，这就是互易性原理。注意，用 (9-4-4) 中的字母  $D$ ，类似的叙述适用于力和位移。字母  $C$  和  $B$  则适用于一种混合的叙述。

在现实的实验里，不可能有纯的声量源或纯的外部力。也就是说，外部震源可能有某个有限的、非零阻抗。那么，

我们做的第一个实验中间就会有激发，求得其端点响应

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ F_1 \end{bmatrix} \quad (9-4-5)$$

源和接收器互换位置，得出

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ F_0 \end{bmatrix} \quad (9-4-6)$$

(9-4-5)和(9-4-6)中值得注意的特点是：这两个矩阵互为转置。如果我们做的是更精巧的实验，(9-4-5)和(9-4-6)中的向量包含有更多元素，这种特点也不见得会丢失。例如，(9-4-5)或(9-4-6)中的一个矢量可能包含自然分离声源或压力感受器的一排元素（组成一个阵列）。事实上，假如读者能够把有弹性的、电磁的、扩散的或位势的各种问题象(9-4-3)那样构成对称代数方程，那么，象(9-4-5)和(9-4-6)的矩阵仍然互为转置。设置象(9-4-3)那样的对称方程通常并不难，虽然这件事在多维非笛卡儿坐标系中可能有点复杂。

一般情况下，我们可以记(9-4-5)或(9-4-6)中右边的矢量为  $E$ ，表示激发，记其左边的矢量为  $R$ ，表示响应。用  $M$  代表(9-4-5)的矩阵， $M^T$  是其转置矩阵，(9-4-5)和(9-4-6)则为

$$R_0 = ME_1 \quad (9-4-7)$$

$$R_1 = M^TE_0 \quad (9-4-8)$$

现在我们从(9-4-7)和(9-4-8)推演出一个物理命题。首先，求(9-4-7)和  $E_0^T$  的内积

$$E_0^TR_0 = E_0^TME_1$$

右边是个标量，可以作转置

$$E_0^T R_0 = (E_0^T M E_1)^T = E_1^T M^T E_0$$

以(9-4-8)代入，得

$$E_0^T R_0 = E_1^T R_1 \quad (9-4-9)$$

方程(9-4-9)是互易性的基本表述：激发矢量和响应矢量在位置0的内积等于它们在位置1的内积。注意，这两个内积是在“不同实验”中产生的矢量之间作出的。

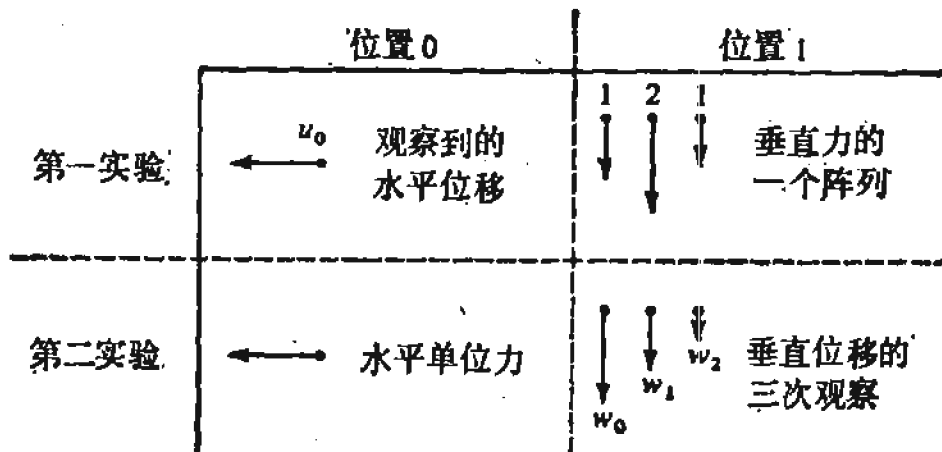


图 9-2

互易性一例。互易性说明  $u_0 = w_0 + 2w_1 + w_2$

图9-2是定向位移和力矢量的弹性系统的一个例子。怀特(White)<sup>[32]</sup>在实验室做的一个例子，是个组合了电磁的、固体的、液体的和气体的介质的实验，见图9-3。检波器是个跳动的钟摆，耦合一感应线圈。第一个检波器装在一个管子上，管子放在一玻璃干燥器的底部。第二个检波器挨着玻璃，用一大块做模型用的泥粘着，处在水平面以下。顶部的一对记录表明第一检波器里的(源)电流和第二检波器里的(开路)电压，底部记录表明第二检波器的电流和在第一检波器的电压。



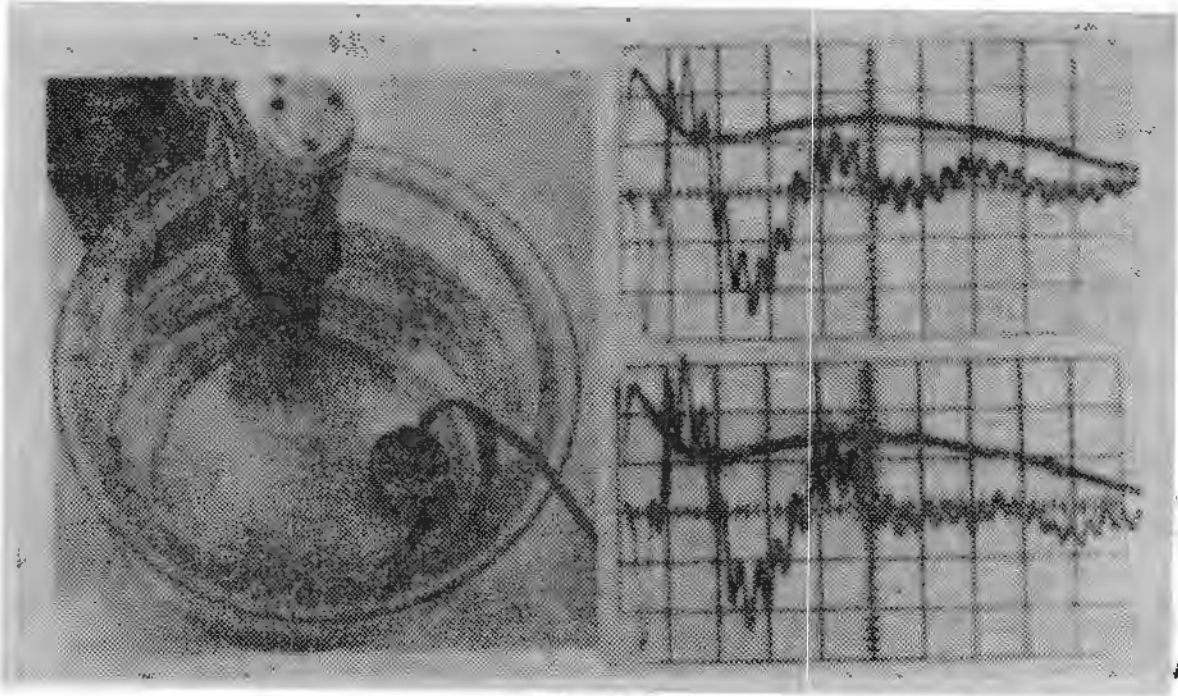


图 9-3

组合电磁的、固体的、液体的和气体的系统中说明互易性原理的例子(见 J.E.White 著《地球物理学》，参考文献[32])。

### 练习

1. 请考虑普哇松(Poisson)方程  $\partial_{xx}R = -E$ ，取五个网格点，边界条件是端点为 0。在第三网格点上的一个单位激发给出它的解  $(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0)$ 。在第二网格点内有一单位激发，求它的解，如果做对了，可观察到互易性。

2. 写出象 (9-4-3) 那样的热流方程。虚数的介入将怎样改变互易性原理的叙述？

3. 写出二维笛卡儿坐标系中声学的三个一阶偏微分方程。可看图 (9-4-3) 的网格排列。对向量  $(U_1, P_1, W_1, U_2, P_2, W_2, \dots, U_9, P_9, W_9)$  写出  $27 \times 27$  个方程的方程组，使它们对称，并排成明显的整齐形式。

4. 在 8-3 节中，练习 4 和 5 在一起描述了互易性定理，说明，“如果源和接收器互换，也可观察到同样的波形”。求解一地面源及在层间有一接收器的问题。然后将源

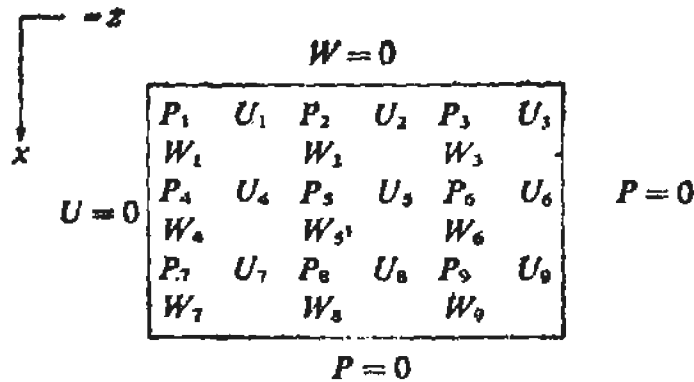


图 9-4-3

与接收器互换解同一问题，以验证互易性定理。

### 9-5 守恒原理和解的正交性

我们以前叙述过，在层理介质的问题可归结为一个一阶矩阵微分方程

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{s} \quad (9-5-1)$$

可看出，许多 (9-5-1) 形式的问题都可化为所谓艾金森 (Atkinson) 的形式，即

$$\mathbf{J} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{y} = [\mathbf{G}(z) + \lambda \mathbf{H}(z)] \mathbf{y} \quad (9-5-2)$$

其中  $\mathbf{J}$  是一与  $z$  无关的斜赫米森矩阵 ( $\mathbf{J}^* = -\mathbf{J}$ )， $\mathbf{G}(z)$  和  $\mathbf{H}(z)$  是赫米森矩阵 ( $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}$ )， $\lambda$  是特征值，是一个标量。例如，在声学里，有

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 0 & \omega \rho \\ \left( +\frac{\omega}{K} - \frac{k_x^2}{\omega \rho} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} s_p \\ s_w \end{bmatrix} \quad (9-5-3)$$

用一斜赫米森矩阵左乘，给出

$$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( +\frac{\omega}{K} - \frac{k_x^2}{\omega\rho} \right) & 0 \\ 0 & \omega\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_w \\ s_p \end{bmatrix} \quad (9-5-4)$$

(9-5-4) 的重要性是：它的算子是自伴的，即右边的矩阵是赫米森型的，所以，左边算子也是这样。要了解为什么  $J(\partial/\partial z)$  是赫米森型的，可把它的差分逼近写出来

$$\begin{aligned} J \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{i}{\Delta z} \begin{bmatrix} 0 & \delta_z \\ \delta_x & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta z} \left[ \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} i & -i \\ & i & -i \\ & & i & -i \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} i & -i \\ & i & -i \\ & & i & -i \end{matrix} & \end{array} \right] \quad (9-5-5) \end{aligned}$$

查看一下 (9-5-5)，我们看到它缺了两行，不成为一个方阵。挑选两个边界条件似乎可得到两行。很清楚，(9-5-5) 已接近于赫米森型，只要再多挑选两行，就可使它成为赫米森型了。例如

$$\begin{bmatrix} & i \\ -i & \end{bmatrix}$$

把这两行嵌进 (9-5-5) 的上半部和下半部当中就行了。由于算子 (9-5-5) 能够通过合适的边界条件而成为赫米森型，又由于 (9-5-4) 中的其它算子都已是赫米森型的，这样看来，艾金松形式对于那些可应用互易性原理的物理问题是适用的。互易性可应用于绝大多数地球物理勘探问题上。“不可应用互易性的一个简单例子是有风的大气里的声波。从物

理上讲，因为声波逆风传播比顺风走得慢，而从数学方面讲，是因为找不到一个 J 矩阵可把 (9-5-1) 转换成 (9-5-2) 形式。只有在一个无源区域，我们能够把 (9-5-1) 转换成 (9-5-2) 形式。假如我们把  $\omega$  当特征值，再设源项皆为零，可把 (9-5-4) 化为

$$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} = +\omega \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{K} - \frac{k_x^2}{\omega^2 \rho}\right) & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} \quad (9-5-6)$$

这里  $G(z)$  变成零了，而  $k_x^2/\omega^2$ ，它与入射角的正弦成正比，则被看作特征值  $\omega$  的变元值的一个常数。也就是说，我们能把  $-k_x^2$  选来做特征值，这样，(9-5-4) 就成为

$$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{K} & 0 \\ 0 & \omega \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} - k^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega \rho} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} \quad (9-5-7)$$

很明显，还可以有另一种做法，就是对固定的  $\omega$  把角变元  $-k_x^2/\omega^2$  作为特征值。

艾金松形式 (9-5-2) 直接导出各种守恒原理。计算二次型  $y^* J y$  的垂直微商

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} y^* J y &= y_z^* J y + y^* J y_z \\ &= -y_z^* J^* y + y^* J y_z \\ &= -(J y_z)^* y + y^* (J y_z) \\ &= -(G y + \lambda H y)^* y + y^* (G y + \lambda H y) \\ &= (\lambda - \lambda^*) y^* H y \end{aligned} \quad (9-5-8)$$

通常都把特征值  $\omega$ 、 $-k_x^2$  或  $-k_x^2/\omega^2$  取为实的，这样的情况下， $\lambda - \lambda^* = 0$ ，故(9-5-8)表明  $y^* J y$  是一个对  $z$  不变的波变元的二次函数。在声学的例子里，这二次不变量与能流量成正比。特别

$$\begin{aligned} y^* J y &= -i [P^* \ W^*] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} \\ &= -i(P^* W + W^* P) = -2i \operatorname{Re}(P^* W) \end{aligned} \quad (9-5-9)$$

如果我们想考虑一个复频率  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ ，那么，在第一个声学例子(9-5-6)里，(9-5-8)方程变为

$$-\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Re}(P^* W) = \omega_i \left[ \left( \frac{1}{K} - \frac{k_x^2}{\omega^2 \rho} \right) P^* P + \rho W^* W \right] \quad (9-5-10)$$

注意，如果  $P$  和  $W$  有时间依赖  $\exp[-i(\omega_r + i\omega_i)t] = \exp(-i\omega_r t + \omega_i t)$ ，那么，象  $P^* P$  和  $W^* W$  的二次式都具有时间依赖  $e^{2\omega_i t}$ ，我们看到乘数  $2\omega_i$  是由时间微商得出的。因此，(9-5-10)变成

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Re}(P^* W) &= +\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{K} - \frac{k_x^2}{\omega^2 \rho} \right) \right. \\ &\left. P^* P + \rho W^* W \right] = \frac{\partial}{\partial t} E \end{aligned} \quad (9-5-11)$$

方程(9-5-11)可解释为：能量密度  $E$  在一个点上的时间微商与在这个点上的能流量的负散度成正比。在其它问题中，其二次型不一定总是关系到能量。有时也涉及动量。

矩阵论中有一个著名定理：赫米森矩阵具有实的特征

值。那我们为什么要考虑在(9-5-8)中的复特征值的可能性呢？这是因为：有限差分算子矩阵不一定具有使该算子成为赫米森型的边界条件。特别，当  $\partial E/\partial t$  不等于零时，能量必然在边界上渗进或渗出。

现在，假定挑选出来了使  $J\partial/\partial z$  对称的边界条件。则特征值便是实的。令  $y_n(z)$  是(9-5-2)在特征值为  $\lambda_n$  时的一个解，且令  $y_m(z)$  是异于  $\lambda_n$  的另一特征值  $\lambda_m$  对应的解。采用推算(9-5-8)的方法能得到

$$\frac{\partial}{\partial z}(y_m^* J y_n) = (\lambda_n - \lambda_m) y_m^* H y_n \quad (9-5-12)$$

$z$  从  $z_a$  到  $z_b$  求积分，得出

$$y_m^* J y_n \Big|_{z_a}^{z_b} = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b y_m^*(z, \lambda_m) H(z) y(z, \lambda_n) dz \quad (9-5-13)$$

如果挑选的边界条件能满足在  $z_a$  和  $z_b$  时没有能量渗出或渗入，则，左边就为零。因为假定的是  $\lambda_n \neq \lambda_m$ ，我们必然有右边的积分为零。这说明两个解的正交性，这概念与赫米森差分算子矩阵的特征向量的正交性是相同的。这些函数的正交性在理论分析和计算方面都经常用到更细致的分析，包括能量守恒边界条件的最普遍的形式，见参考文献14，第9章。

### 练习

1. 证明：把(9-5-8)应用于(9-5-7)可引出水平的能流量的定义。可取  $k_x = k_r + ik_i$ ，并假定  $|k_r| \gg |k_i|$ 。

## 9-6 弹性波

下面的叙述中，假定读者具有古典弹性理论的一般知识。

很少有教科书叙述过地震学中至为重要的层理介质这个专题。在《美国地震学学会通报》[Bulletin of the Seismological Society of America (BSSA)]上可找到许多有关这个题目的文章。现在我们把本章用过的一般方法应用于各向同性的弹性学方程的一些成果，提供给不熟悉 BSSA 的读者。

弹性理论中，约定  $(u, w)$  表示在  $x$  和  $z$  方向的位移， $\tau$  是应力矩阵， $\lambda$  和  $\mu$  是拉米 (Lame) 常数， $\rho$  是密度。由虎克 (Hooke) 定律和牛顿定律，利用  $e^{-i\omega t}$  时间依赖关系可得

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} U \\ \tau_{zz} \\ W \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\partial_x & \frac{1}{\mu} \\ 0 & 0 & -\rho\omega^2 & -\partial_x \\ \frac{-\lambda}{(\lambda+2\mu)\partial_x} & \frac{1}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 \\ -\rho\omega^2 - \gamma & \frac{-\partial_x \lambda}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \tau_{zz} \\ W \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (9-6-1)$$

其中

$$\gamma = \partial_x \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)\partial_x} \quad (9-6-2)$$

再规定

$$\alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

$$\beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

$$m^2 = \frac{-\omega^2}{\alpha^2} - \partial_{xx} \quad (9-6-3)$$

$$n^2 = \frac{-\omega^2}{\beta^2} - \partial_{xx}$$

$$l^2 = \frac{-\omega^2}{\beta^2} - 2\partial_{xx}$$

如果物质性质在  $x$  方向不变化，我们有行特征向量变换  $R$ ，表示上行波和下行波变元。

$$\begin{bmatrix} p^+ \\ s^+ \\ p^- \\ s^- \end{bmatrix} = \frac{\Lambda^{-1}}{2\omega^2\rho} \begin{bmatrix} 2\mu m \partial_x & m & \mu l^2 & \partial_x \\ \mu l^2 & -\partial_x & -2\mu n \partial_x & n \\ -2\mu m \partial_x & -m & \mu l^2 & \partial_x \\ -\mu l^2 & \partial_x & -2\mu n \partial_x & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \tau_{zz} \\ w \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (9-6-4)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ \tau_{zz} \\ w \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_x & -n & -\partial_x & -n \\ -\mu l^2 & 2\mu n \partial_x & -\mu l^2 & 2\mu n \partial_x \\ -m & \partial_x & m & -\partial_x \\ -2\mu m \partial_x & -\mu l^2 & 2\mu m \partial_x & \mu l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^+ \\ s^+ \\ p^- \\ s^- \end{bmatrix} \quad (9-6-5)$$

还有列特征向量逆变换  $C$

其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} m & & & \\ & n & & \\ & & -m & \\ & & & -n \end{bmatrix}$$

这些矩阵恰到好处地划分为  $2 \times 2$  个块。读者可验证  $CR = RC = I$  及  $CAR = A$ 。



## 第10章 二维和三维初值问题

几乎所有的教科书（例如，参考文献33和34），都致力于用差分逼近微分方程的方法解初值问题。在本节中，我们将扼要地讲述其主要的概念。二维中一般做法是：把计算机储存器划分为一个或几个二维网格，在网格中，场变元用二维空间的函数表示出来。然后，送进初始条件，启动计算机，观察所得结果。对于扩散方程已经有过许许多多广泛的研究了，可是对于波动方程的研究还远远不够。用波动方程做模型，存在的问题是：每个波长十个点大概不够，而且，就算是够了，也不能把许多个波长置于一个合理的网格上。于是传播的能量迅速地传到网格边角处，且又返回来，不管你要它或不要它，都得这样。改善这种困境的一个办法是：建立和波一起移动的坐标系统。这些坐标系统也便于波从地面向下作投射，即从这些在地面上观察到的波，返推它在地壳中传播的情况。这类投射，构成了第11章中所要叙述的实用反射地震数据处理技术的基础。

### 10-1 古典的时间初值问题

对于一维初值问题，借助于热传导方程来说明基本概念是最容易的。热传导方程是从两个直观的浅显的方程导出来的。第一个方程是：热流  $H$  产生于温度梯度，而与热导率  $\sigma$  成正比

$$H = -\sigma \frac{\partial T}{\partial x} \quad (10-1-1)$$

第二个方程是：温度的下降与热流  $H$  的散度成正比，而与物质的热容  $C$  成反比

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{C} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (10-1-2)$$

通常的做法是把 (10-1-1) 代入 (10-1-2)，忽略  $\sigma$  的求导，得

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\sigma \partial^2 T}{C \partial x^2} \quad (10-1-3)$$

差分方程定理中，通常约定将温度  $T(x, t) = T(k\Delta x, n\Delta t)$  记为  $T_k^n$ ，其中上标指示时间。令  $b = \sigma \Delta t / 2C \Delta x^2$ ，(10-1-3) 可写成

$$T_k^{n+1} - T_k^n = 2b(T_{k+1}^n - 2T_k^n + T_{k-1}^n) \quad (10-1-4)$$

如果在所有的空间位置  $k$ ，某一特定时间  $n$  的温度  $T_k^n$  为已知，则 (10-1-4) 可以用来计算一切时间的温度。读者会注意到，时间微商中心在  $T_k^{n+1/2}$ ，而空间微商中心在  $T_k^n$ 。这就有困难了。热传导微分方程平滑长的空间波长来得慢，而平滑较短的波长就较快。热传导差分方程也是这样，只不过那些很短的波长在时间微商和空间微商中心处略有差别。结果，那些很短的波长并不按适当的比率衰减，甚至反而会扩大。事实上， $\Delta x$  愈缩愈小时，就有可能在网格上包括愈来愈短的波长，发展下去，终归要把解破坏。这种情况，称为不稳定性，在所有论及这课题的书中都有详细的讨论。有人希望能以  $(T_k^{n+1} - T_k^{n-1}) / (2\Delta t)$  逼近  $\partial T / \partial t$ ，用改变时间差分中心的办法避免这种不稳定性，但是结果更糟糕，给每一个  $\Delta x$  都造成了不稳定，原因是热传导微分方程对时间是

一阶的，但用二步以上的时间差分，就产生一个对时间是二阶的差分方程。二阶方程经常有两个解。在这种情况下，一个解遵循热传导方程；另一个则是象  $(1, -2, 4, -8, \dots)$  那样的交错递增指数，它很快就把热传导的解压倒和淹没了。

这些问题完全可用克瑞安克-尼可逊 (Crank-Nicolson) 格式来避免。这种格式总能保证对任何一个  $\Delta x$  的稳定性，它也能应用于声学、电磁学和弹性方面的波动方程。克瑞安克-尼可逊格式中，可用下列方法把空间差分中心移在  $T_k^{n+1/2}$

$$T_k^{n+1} - T_k^n = b(T_{k+1}^n - 2T_k^n + T_{k-1}^n) + b(T_{k+1}^{n+1} - 2T_k^{n+1} + T_{k-1}^{n+1}) \quad (10-1-5)$$

使用克瑞安克-尼可逊格式明显的问题是：从时间  $n$  求时间  $n+1$  的步骤不那么显著了。把 (10-1-5) 中所有的带  $n+1$  的项移到左边，把带  $n$  的项都移到右边，得出

$$-bT_{k+1}^{n+1} + (1+2b)T_k^{n+1} - bT_{k-1}^{n+1} = D_k^n \quad (10-1-6)$$

右边的  $D_k^n$  是  $T^n$  的一个已知函数。这样，我们得到了关于  $T^{n+1}$  的一组联立方程。把它整个儿写出来，可看出为什么这组方程称为三对角线方程组

$$\begin{bmatrix} (1+2b) & -b & & & \text{都是0} \\ -b & (1+2b) & -b & & \\ & -b & (1+2b) & -b & \\ & & & -b & \\ \text{都是0} & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_N \end{bmatrix} \quad (10-1-7)$$

对于 (10-1-7) 这样的联立方程求解极为容易。下面将说明，这不比使用 (10-1-4) 费劲。对那些不专门研究计算方法、而只想得知数值地求解偏微分方程的读者来说，建议他们最好采用克瑞安克-尼可逊格式。具体图解一下求解(10-1-

7)的过程,显然要多花一点功夫,但有一个好处,即可使用任意的  $\Delta x$  和  $\Delta t$ , 并可考虑非中心差分的稳定性和偏倚影响。

现在我们研究二维空间中的热流。热传导方程是

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\sigma}{C} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (10-1-8)$$

这个方程的简单而有效的一个解法是分裂法。我们于交替的时间步进使用两个不同的方程, 它们是

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2\sigma}{C} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{所有 } y) \quad (10-1-9a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2\sigma}{C} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{所有 } x) \quad (10-1-9b)$$

(10-1-9a) 和 (10-1-9b) 可分别用克瑞安克-尼可逊方法求解。

还有不同于分裂法的其它解法, 不过它们的截断误差 (在差分方程和微分方程之间的渐近误差) 并不比用分裂法的截断误差更快地趋于零。

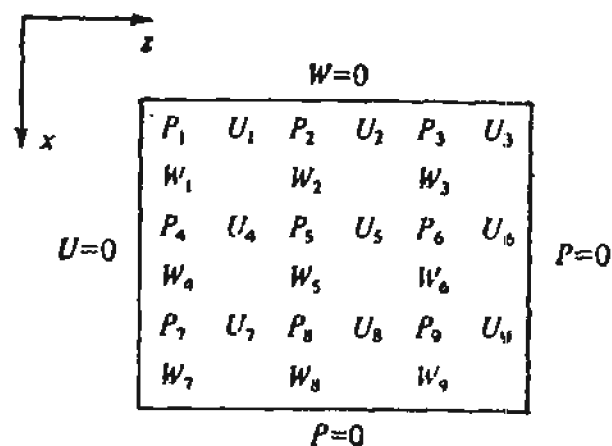


图 10-1

声学方程的一个网格排列。这种排列可避免在多于一个的间隔上取  $\partial_x$  或取  $\partial_z$  的必要性。它也使得 (10-1-12) 是一个标量方程, 而不是一个  $2 \times 2$  矩阵方程。

现在用克瑞安克-尼可逊形式写出声学问题的公式。令  $u$  和  $w$  为  $x$  方向和  $z$  方向的速度。令  $P$  为压力， $\rho$  为密度， $K$  为不可压缩率。加速度等于压力梯度，得

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial z}$$

而压力按速度的散度下降，得

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -K \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

排成一矩阵，用  $\partial_x$  表示  $\partial/\partial x$ ，等等，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} P \\ U \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -K\partial_x & -K\partial_z \\ -\rho^{-1}\partial_x & 0 & 0 \\ -\rho^{-1}\partial_z & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ U \\ W \end{bmatrix} \quad (10-1-10)$$

用克瑞安克-尼可逊格式来处理 (10-1-10)，跟 (10-1-3) 的处理是相似的。主要不同点在于，(10-1-10) 中是矢量和矩阵，而在 (10-1-3) 中，只有标量。当对 (10-1-10) 应用分裂法时，于交替时间步进，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & -K\partial_x \\ -\rho^{-1}\partial_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix} \quad (10-1-11a)$$

及

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & -K\partial_z \\ -\rho^{-1}\partial_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} \quad (10-1-11b)$$

为要给 (10-1-11 a) 写出边界条件的公式，把  $P$  和  $U$  交替地定在棋盘方块上来得方便，见图10-1。

最后，我们讲一下 (10-1-6) 或 (10-1-7) 的实际解法。

这是很重要的，因为象 (10-1-6) 或 (10-1-7) 这样的三对角线联立方程组有快速解法。三对角线联立方程组的一般形式是

$$A_k T_{k+1} + B_k T_k + C_k T_{k-1} = D_k \quad (10-1-12)$$

在热传导方程中，(10-1-12) 的元素都是标量。在其它物理问题中， $A$ 、 $B$  和  $C$  可能是  $2 \times 2$  矩阵， $T$  对每个  $k$  是在  $n+1$  时间的一个  $2 \times 1$  矢量， $D_k$  是在  $n$  时间的已知的场变元的一个  $2 \times 1$  矢量函数。求解的方法是：再写下一个与 (10-1-12) 有同解的  $T_k$  的方程 ( $E_k$ ,  $F_k$  暂为未知)

$$T_k = E_k T_{k+1} + F_k \quad (10-1-13)$$

移动下标，(10-1-13) 改写为

$$T_{k-1} = E_{k-1} T_k + F_{k-1} \quad (10-1-14)$$

代入 (10-1-12)

$$A_k T_{k+1} + B_k T_k + C_k (E_{k-1} T_k + F_{k-1}) = D_k \quad (10-1-15)$$

将 (10-1-15) 类似于 (10-1-13) 重排一下

$$T_k = - (B_k + C_k E_{k-1})^{-1} A_k T_{k+1} + (B_k + C_k E_{k-1})^{-1} (D_k - C_k F_{k-1}) \quad (10-1-16)$$

比较 (10-1-16) 和 (10-1-13)，我们看到这二者相同，所以  $E_k$  和  $F_k$  可以用递推来确立

$$E_k = - (B_k + C_k E_{k-1})^{-1} A_k \quad (10-1-17a)$$

$$F_k = (B_k + C_k E_{k-1})^{-1} (D_k - C_k F_{k-1}) \quad (10-1-17b)$$

很自然，在计算机上进行时，碰到矩阵含零的地方，如 (10-1-11) 那样，可以简化计算。

现在我们考虑边界条件。假定  $T_0$  已给定了，即可取  $E_0 = 0$ ,  $F_0 = T_0$  来满足 (10-1-13)，并计算所有的  $E_k$  和  $F_k$ 。然后，如果  $T_N$  是已给定了的，我们可以用 (10-1-13) 来顺次计算  $T_{N-1}$ ,  $T_{N-2}$ ,  $\dots$ ,  $T_0$ 。另一组有用的边界条件是规定比率：

$r_1 = T_0/T_1$  和  $r_2 = T_N/T_{N-1}$ 。从挑选  $E_0 = r_1$ 、 $F_0 = 0$  开始, 计算  $E_k$  和  $F_k$ 。然后, 解下列方程求出  $T_N$ 。由(10-1-14)

$$T_{N-1} = E_{N-1}T_N + F_{N-1}$$

$$T_N/r_2 = E_{N-1}T_N + F_{N-1}$$

$$T_N = \left( \frac{1}{r_2} - E_{N-1} \right)^{-1} F_{N-1}$$

然后, 如前计算  $T_{N-1}$ ,  $T_{N-2}$ , ...。

前面讲过, 对于偏微分方程的数值解法还有许多细节问题。本章只叙述关于初值问题的要点。解三对角线联立方程的子程序见图10-2。

```

SUBROUTINE TRI(A,B,C,N,T,D,E,F)
DIMENSION T(N),D(N),F(N),E(N)
N1=N-1
E(1)=1.0
F(1)=0.
DO 10 I=2,N1
DEN=B+C*E(I-1)
E(I)=-A/DEN
10 F(I)=(D(I)-C*F(I-1))/DEN
T(N)=F(N1)/(1.0-E(N1))
DO 20 J=1,N1
I=N-J
20 T(I)=E(I)*T(I+1)+F(I)
RETURN
END

```

图 10-2

解三对角线联立方程组的程序。假定  $A$ 、 $B$  和  $C$  与  $h$  无关, 使用了零坡度端点条件。

## 练 习

1. 考虑在二维初值问题, 在  $4 \times 4$  网格上, 用克瑞安克-尼可逊格式求解(10-1-8)。将得出一个关于未知数  $T_{j,i}^{n+1}$  的  $16 \times 16$  联立方程组。在此  $16 \times 16$  矩阵中, 零是怎样排列的? 实际求解这方程组较为困难, 建议使用分裂法求解。

## 2. 热传导偏微分方程的差分逼近是

$$P_j^{n+1} - P_j^{n-1} = \frac{a \Delta t (P_{j+1}^n - 2P_j^n + P_{j-1}^n)}{\Delta x^2} + s_j^n$$

利用试探解  $P_j^n = Q_n e^{ikj\Delta x}$  把这方程简化为一维的差分方程。用  $Z$  变换的术语写出这简化了的方程。对于  $a$  的任一实值，这方程相应于一个非发散滤波器吗？对  $a$  的任一虚值，相应于一个非发散滤波器吗（利用对  $s$  的付里叶展开）？

3. 修改图10-2的计算机程序，可规定零坡度端点条件，求解(10-1-7)。

4. 令  $b = 0.5$ ，初始条件  $T(1) \cdots T(20) = 0.0$  和  $T(21) \cdots T(30) = 1.0$ ，写出求解(10-1-6)的计算程序。可用图10-2中的子程序 TRI。

## 10-2 光学上波的外推

地球物理方法，通常是在地面 ( $x$  轴) 上沿着一条测线进行测量。通过地面上获得的观测资料，推论地下地壳的性质。首先一步常常是把地面上的观察资料向下作外推。

在研究外推空间波场的数值方法之前，先温习一下光学上使用的通过显微镜和望远镜作波的外推的方法。在参考文献35中可看到一份较为完整的报告。

考虑一个二维笛卡儿坐标系中的波扰动  $p(x, z, t)$ ，它在  $z_0$  为已知。要说明它是怎样向光轴下面进行外推的。当一光束向光轴下投射时，通常有三种情况。第一是光束通过一孔或照相爆光的投射。在数学上描述这种情况，仅需确定透过这孔、取值范围在 0 到 1 之间的一个透射比函数就行了。令光轴为  $z$  轴，把注意力限制在二维空间，通过位于  $z_0 + dz/2$  上的一个吸收因子  $T(x)$  的投射是



$$p(t, x, z_0 + dz) = T(x)p(t, x, z_0) \quad (10-2-1)$$

第二个常见情况是投射通过一透镜，常常近似为“薄透镜”。这里必须规定一个微分延迟函数  $\tau(x)$ ，该函数描述在  $x$  处平行于  $z$  轴的一射线透过透镜时传播时间的延迟。如果透镜位于  $z_0 + dz/2$ ，则波场与一延迟了的脉冲的褶积为

$$\begin{aligned} p(t, x, z_0 + dz) &= \int p(t-s, x, z_0) \delta[s - \tau(x)] ds \\ &= p[t - \tau(x), x, z_0] \end{aligned} \quad (10-2-2a)$$

此时移函数可简单地在频率域表达出来，在频率域，褶积 (10-2-2a) 变成了一个乘积。故有

$$P(\omega, x, z_0 + dz) = P(\omega, x, z_0) e^{i\omega\tau(x)} \quad (10-2-2b)$$

第三个光学上常见情况，是光的投射穿越一个空的空间区域。令人惊奇的是，这竟是这三种投射中最难的一种了。首先，我们想到波动方程

$$(\partial_{xx} + \partial_{zz} - \frac{1}{v^2} \partial_{tt}) p(t, x, z) = 0 \quad (10-2-3)$$

令速度  $v$  对时间和空间为一常数，我们可以使用试探解

$$p(t, x, z) = P(\omega, k_x, z) e^{-i\omega t + ik_x x}$$

此式把 (10-2-3) 简化为常微分方程

$$\frac{d^2}{dz^2} P = \left( -\frac{\omega^2}{v^2} + k_x^2 \right) P \quad (10-2-4)$$

这方程有两个解， $e^{ik_z z}$  和  $e^{-ik_z z}$ ，其中

$$k_z = \left( \frac{\omega^2}{v^2} - k_x^2 \right)^{1/2} \quad (10-2-5)$$

这两个解中，一个是在  $z$  轴下面的波，另一个是顺着光轴上行的波。初始条件（且近似地认为在透镜和在孔处无返回散

射) 使我们能把其中一个解排除掉, 给我们留下

$$\begin{aligned} P(\omega, k_x, z) &= P(\omega, k_x, z_0) e^{ik_x(z-z_0)} \\ &= P(\omega, k_x, z_0) e^{i(\omega^2/v^2 - k_x^2)^{1/2}(z-z_0)} \end{aligned} \quad (10-2-6)$$

右边是  $k_x$  的两个函数的乘积。它也是  $\omega$  的两个函数的乘积。这意味着, 用付里叶分析的标准做法, 我们又可以把(10-2-6)再化为时间域或空间域中、或者时空两个域中的褶积。把“滤波器”传输函数

$$\exp i \left( \frac{\omega^2}{v^2} - k_x^2 \right)^{1/2} (z - z_0) \quad (10-2-7)$$

转换到空间域, 可得一“脉冲响应”。在此情况下, 此脉冲响应应具有穿过一个点孔的波场的物理含义。从一个点孔发出的光束, 样子有些象从一个点光源来的光束。为识别其相异处, 请注意传输函数(10-2-7), 无论  $k_x$  为何值, 其幅值总为1, 但是, 从图10-3可知, 点光源的谱, 接近  $k_x = 0$  处较低, 而高峰在  $k_x = \pm \omega/v$  左右。这意味着, 孔函数不象点光源那样各向同性地辐射, 然而在靠近  $k_x = 0$  处包含更多的能量, 这是顺着  $z$  轴而下的能量。看来, 把(10-2-7)用付里叶变换变到时间域及空间域, 分析步骤并不那么容易。菲力普·舒尔茨(Philip Schultz)做过一些付里叶变换计算, 以获得其实部的显示。见图10-4、图10-5和图10-6。采样数据的付里叶变换在所有变换的坐标上都是周期性的。在图中看的很明显。

大家都知道, 透镜可用来做付里叶变换。实际上让光束传播到无穷远时, 就会发生付里叶变换。透镜的作用正是从无穷远把光束收聚起来。假定在  $z_0$  观察到一单色的光扰动  $P(x, z, \omega)$ 。作为  $x$  的函数, 可以展成以  $A(k_x) e^{ik_x x}$  形式为分量的付里叶积分。重要的是, 任何单一分量代表的是与  $z$  轴

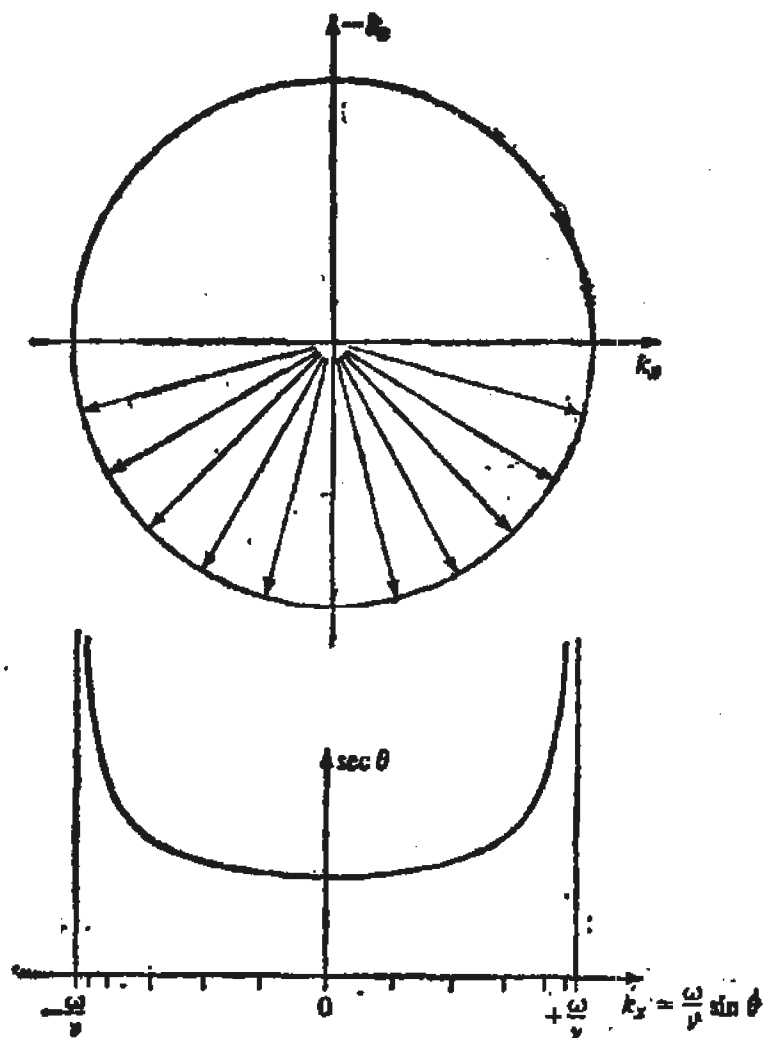


图 10-3

用  $k_x$  表示的从一点光源发出的各向同性分布射线的功率谱，在  $\theta = \pm 90^\circ$  左右、在  $k_x = \pm \frac{\omega}{v}$  处射线集聚。作为  $k_x$  函数的功率将与  $d\theta/(dk_x/d\theta) = d\theta/(d\sin\theta/d\theta) = d\theta/\cos\theta = [1 - (vk_x/\omega)^2]^{-1/2} d\theta$  成正比。这个结果可以与传输函数 (10-2-7) 比较。该传输函数在  $-\omega/v < k_x < \omega/v$  幅值保持一常数值。

成角度  $\sin\theta = vk_x/\omega$  传播的一个平面波。在向无穷远传播时，所有这些射线都是彼此分开的。当它们投射到一个屏幕上时， $k_x$  的最大值投射到离  $x=0$  最远的地方。图10-7a就展示了这个概念，这里使用了一个透镜。两个透镜则可将映象倒个儿，这是数学事实的物理说明，就是说付里叶变换不是它自身的逆。其逆变换具有符号相反的指数。我们能很容易地证

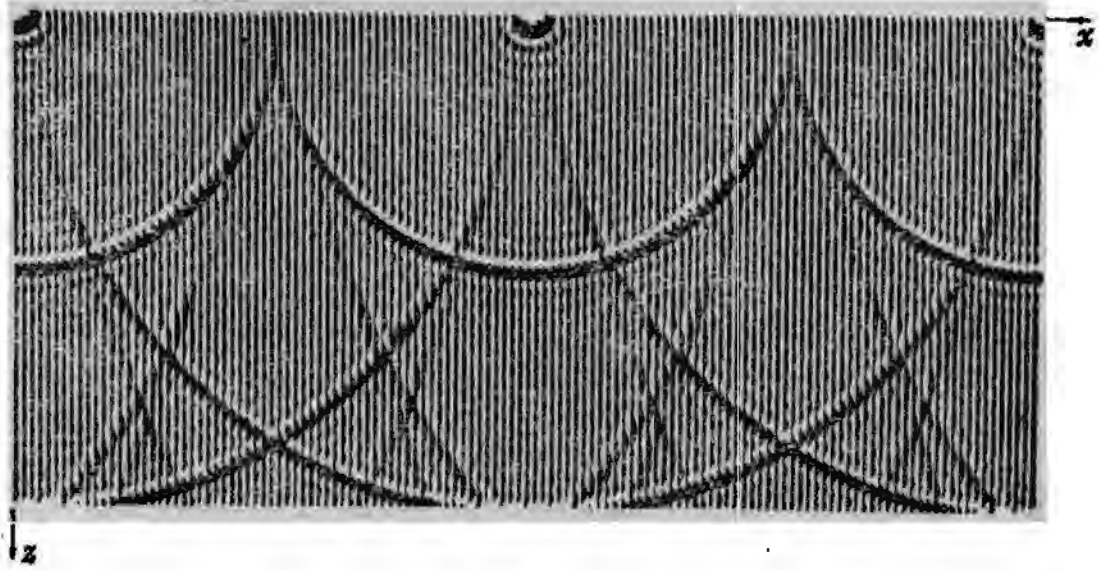


图 10-4

波动方程传输函数(快照)。对  $k_x$  和  $\omega$  做了  $\exp [i(\omega^2/v^2 - k_x^2)^{1/2}z]$  的双重付里叶和。在一固定  $t$  上做  $(x, z)$  平面的显示。可看出, 半圆形波前, 沿着  $z$  轴方向传播的波的振幅最大。用求和来逼近付里叶积分形成了在  $x$  和  $t$  上的周期性。

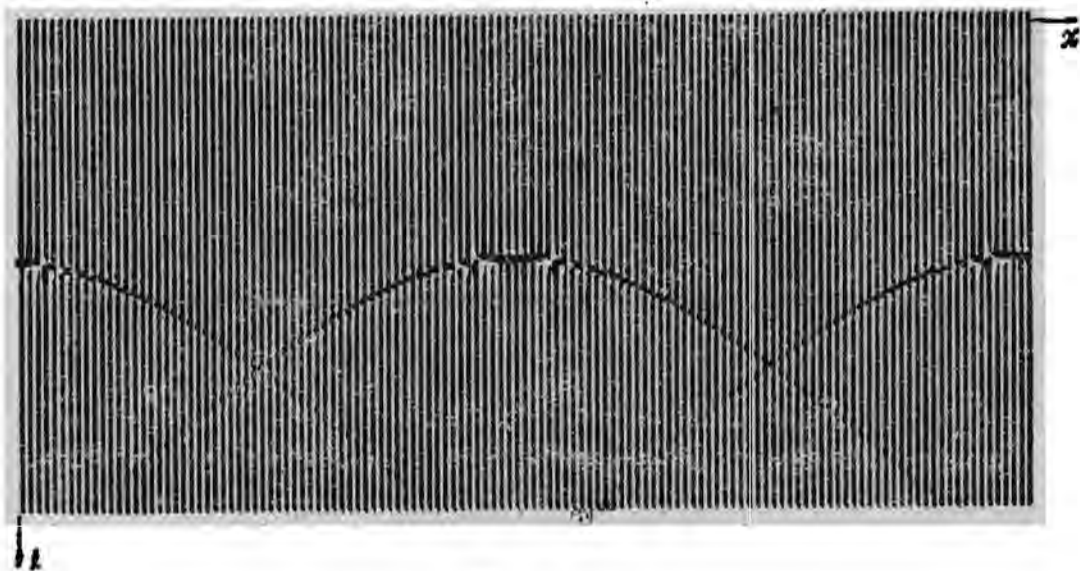


图 10-5

波动方程传输函数的地震共炮点道集型显示。对  $k_x$  和  $\omega$  做了 (10-2-7) 双重付里叶和。类似于地震记录道集, 是对一固定  $Z_0$  做的  $(x, t)$  平面显示。双曲线的到达时测量出从  $(0, 0)$  的一点孔到屏幕  $(x, z_0)$  的距离。射线理论容易解释旅行时, 可是振幅沿双曲线的缓慢衰变——倾斜函数——是绕射现象, 不易用分析方法算出来, 尤其是远离轴的地方, 更为不易, 倾斜函数不可与无用数据混淆, 后者是由于想在网格上表示  $\delta$  函数而造成的。

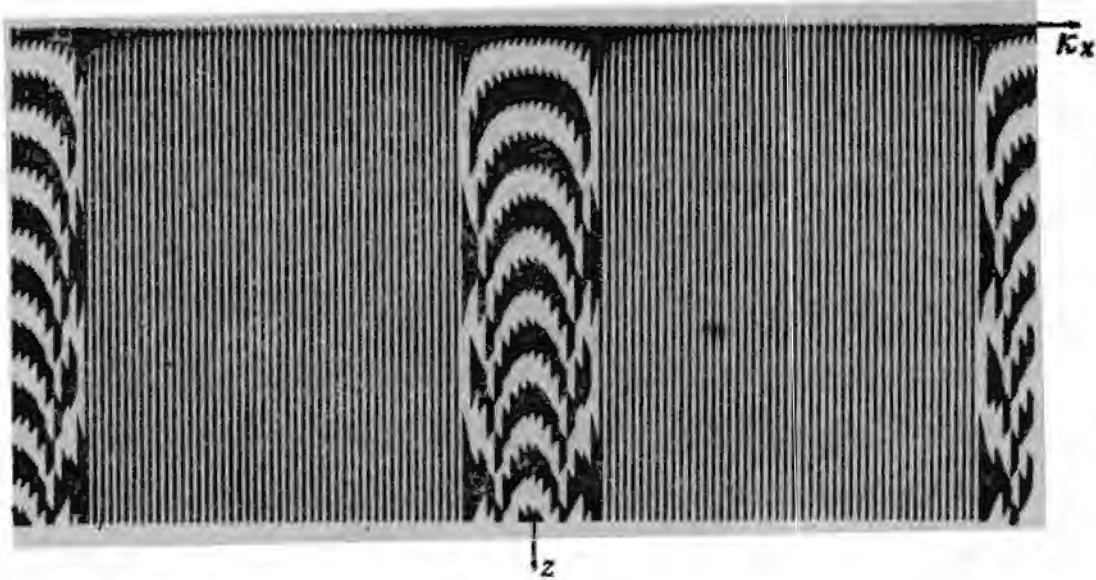


图 10-6

精确的传输函数  $\exp(i\sqrt{(\omega^2/v^2) - k_x^2}Z)$  的实部, 取  $\omega$  为常数, 描绘  $k_x$  对  $Z$  的关系。该函数特征上的突然变化发生在  $\omega^2/v^2 = k_x^2$  处, 说明了传播和消失两者之间的过渡。

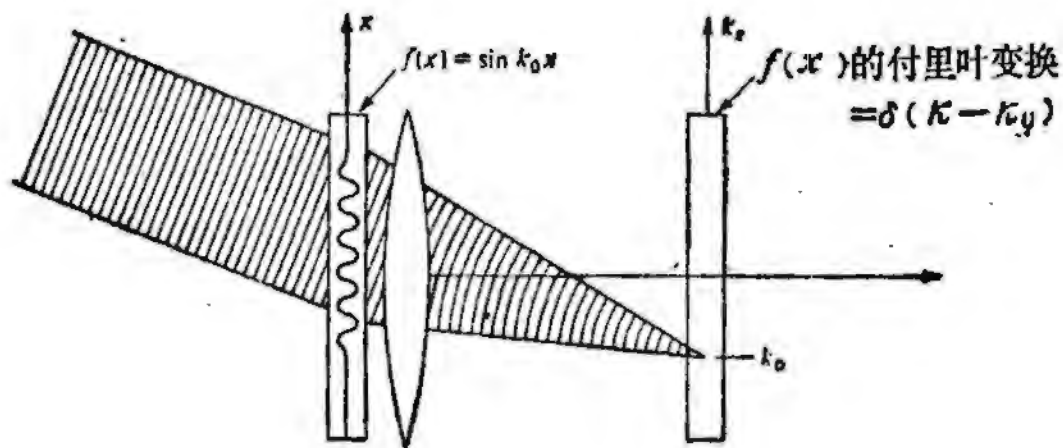


图 10-7a

透镜做的付里叶变换。光束以某一角度传播时, 在  $x$  域内形成一正弦振荡。透镜把光束变换到  $k_x$  域的一个点上。正弦的付里叶变换是一  $\delta$  函数。这个  $\delta$  函数离光轴的位移与此正弦曲线的振荡率成正比。

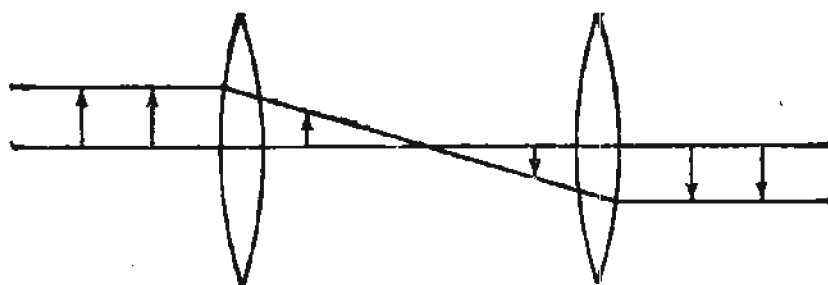


图 10-7b

两个透镜，相隔它们的焦距的两倍，可用来把映象倒个儿。做两次付里叶变换能使一函数变个符号（由正变负或由负变正）。

实，用同号指数变换两次，正好颠倒了原来的波形，这情形在图10-7b中有了说明。

### 10-3 单色波的数值外推

用光学方法做波的外推，对于波速  $v = v(x, z)$  随空间位置而变化的物质来说不一定有效。因为在这种情况下，用复指数函数表示不出波动方程的准确解。所以我们现在要探求外推波场的数值计算步骤，以至无论有没有解析解及无论何种速度分布都可以进行外推。解是单色波  $e^{-i\omega t}$  这一假定，把波动方程简化为海尔摩茨 (Helmholtz) 方程

$$P_{xx} + P_{zz} = \frac{-\omega^2}{v(x, z)^2} P \quad (10-3-1)$$

用 (10-3-1) 怎样把  $P(x, z_0)$  在  $z$  方向上进行外推呢？设想我们在  $z_0$ ，对所有的  $x$  来说  $P$  为已知。于是，把 (10-3-1) 整理一下，可求得  $P_{zz}$

$$P_{zz} = -\frac{\omega^2}{v^2} P - P_{xx} \quad (10-3-2)$$

在某一个  $z$ ，对所有  $x$  给出了  $P$  和  $P_z$ ，从理论上讲，借助

于(10-3-2), 可以期望能用有限差分格式求得在  $z + \Delta z$  处的  $P$  和  $P_z$ 。但实际上, 我们遇到了一带根本性的困难。为了说明这一点, 我们假定  $v$  与  $x$  无关, 而对  $x$  的依赖关系已经通过付里叶变换变为对  $k_x$  的依赖关系了。于是, (10-3-2) 成为

$$P_{zz} = \left( -\frac{\omega^2}{v^2} + k_x^2 \right) P \quad (10-3-3)$$

(10-3-3) 的特性将受到因子  $(-\omega^2/v^2 + k_x^2)$  符号的影响。如果它是正的, 就会有增长的和衰减的指数解。如果是负的, 就有波浪起伏的正弦解。从数值计算上讲, 增长的指数解会引起问题。这些增长的解, 如果我们能够用零振幅作为增长的指数函数的初值, 便影响不大。可以用在  $P$  和  $P_z$  之间预定某一个比率的办法来处理。实际在地球物理学上, 通常只不过是测量  $P$ , 并不测量  $P_z$ , 所以, 可以从  $P$  描绘出理论上的一个  $P_z$  的值, 借以避免增长的解。再者, 从光学方面看, 把  $P(x, z_1)$  外推到  $P(x, z_2)$  并不需要知道偏微商  $P_z(x, z_1)$  的值。波动方程对  $z$  是二阶的, 因此, 有两个解 (上行的和下行的), 也就需要两个边界条件。物理学上在边界值问题中, 要求的解是在  $z_0$  和  $z_N$  之间的中间区域里, 合适的边界条件是规定在  $z_0$  的  $P$  值和  $z_N$  的  $P_z$  值上。在光学中, 避免在  $z_0$  需要  $P_z$ 、或是避免在  $z_N$  需要  $P$ 。这是怎样实现的呢? 在  $k_z$  从两个可能的平方根中只选定一个时, 两个解就可去掉一个。也就只需要一个边界条件了。去掉一个解, 这相当于作一个物理的假定, 这样做不一定切合实际。这项假定符合实际的程度, 有赖于实际的检验。我们现在的目的是要修改 (10-3-2), 加入通常的光学假定, 就是说, 我们只试图以沿着  $+z$  轴的分量描述波, 而不是加

进均匀介质的通常的光学假定。我们不愿用 (10-3-2)，因为它对  $z$  是二阶的，描述了向正  $z$  和负  $z$  两个方向传播的波；我们愿意要一个对  $z$  是一阶的、只描述在  $+z$  方向传播的波的方程。从地球物理来说，我们不观测  $P_z$ ，亦即这个一阶方程只需要  $P(x)$  的初始条件，而不需要  $P$  和  $P_z$  两者同时作初始条件。同时，“下行波”在描述从勘探设备发出的波场时，是常采用的，“上行波”则常常用在描述其后继的观测上。描述在  $+z$  方向传播的一个平面波时，写出

$$P(x, z) = Q_0 e^{i(\omega/v)z}$$

说  $Q_0$  是一未知常数，相当于说波有着未知的振幅和相位。其后，写出

$$P(x, z) = Q(x, z) e^{i(\omega/v)z}$$

现在，我们假定“ $Q(x, z)$  近乎是  $x$  和  $z$  的一个常数函数”。为要讲明白我们以限定  $Q(x, z)$  为缓慢变化的函数的说法，把  $P(x, z)$  限定为近乎在  $z$  方向传播的平面波的波场。实际上， $P$  可能代表与  $z$  轴成一个小角度传播的平面波，它可以是球面波的一小部分，也可以是在地震反射勘探中观察到的返向散射的辐射，或者在坐标系统旋转  $90^\circ$  时，它也可以描述面波。

常常出现的比率  $\omega/v$ ，称为波的空间频率。记

$$m = \frac{\omega}{v(x, z)} \quad (10-3-4)$$

我们还规定  $\bar{m}$  为  $m$  的空间平均

$$\bar{m} = \frac{\omega}{v} \quad (10-3-5)$$

在均匀介质中， $\bar{m}$  就等于  $m$ 。有了这个规定，我们可把波扰



动写为

$$P(x, z) = Q(x, z)e^{i\bar{m}z} \quad (10-3-6)$$

现在, 使  $Q(x, z)$  缓慢地随  $z$  而变的一个补充条件是  $m(x, z)$  相对地离  $\bar{m}$  近。我们计算 (10-3-6) 的一些偏微商

$$P_x = Q_x e^{i\bar{m}z} \quad (10-3-7a)$$

$$P_{xx} = Q_{xx} e^{i\bar{m}z} \quad (10-3-7b)$$

$$P_z = (Q_z + i\bar{m}Q) e^{i\bar{m}z} \quad (10-3-7c)$$

$$P_{zz} = (Q_{zz} + 2i\bar{m}Q_z - \bar{m}^2 Q) e^{i\bar{m}z} \quad (10-3-7d)$$

把 (10-3-7b) 和 (10-3-7d) 代入 (10-3-1), 取消指数, 得出

$$Q_{xx} + Q_{zz} + 2i\bar{m}Q_z + (m^2 - \bar{m}^2)Q = 0 \quad (10-3-8)$$

可以肯定, 对许多应用来说,  $Q$  是缓慢地变化的, 故  $Q_{zz}$  在与  $2i\bar{m}Q_z$  比较时可以从 (10-3-8) 中略去。去掉  $Q_{zz}$  项, 称为抛物线逼近。这就得到了我们所期望的对于  $z$  为一阶的——因而是初值问题的——方程

$$Q_{xx} + 2i\bar{m}Q_z + (m^2 - \bar{m}^2)Q = 0 \quad (10-3-9)$$

在均匀介质中, (10-3-9) 简化为

$$Q_{xx} + 2i\bar{m}Q_z = 0 \quad (10-3-10)$$

方程 (10-3-10) 中, 如果把  $z$  和热传导方程中的时间相对应, 而热导率取为虚数的话, 它便和热传导方程有相同的形式。这个方程, 实际上, 可了解为舒丁格 (Schroedinger) 方程。它可以用于第10-1节中讲过的解热传导方程的方法求数值解。总之, (10-3-10) 对好多用途来说都是合适的, 现在我们看一下把  $Q_{zz}$  项去掉失去了什么。为了便于把 (10-3-10) 和波动方程作比较, 我们反写出  $Q$  变元与  $P$  变

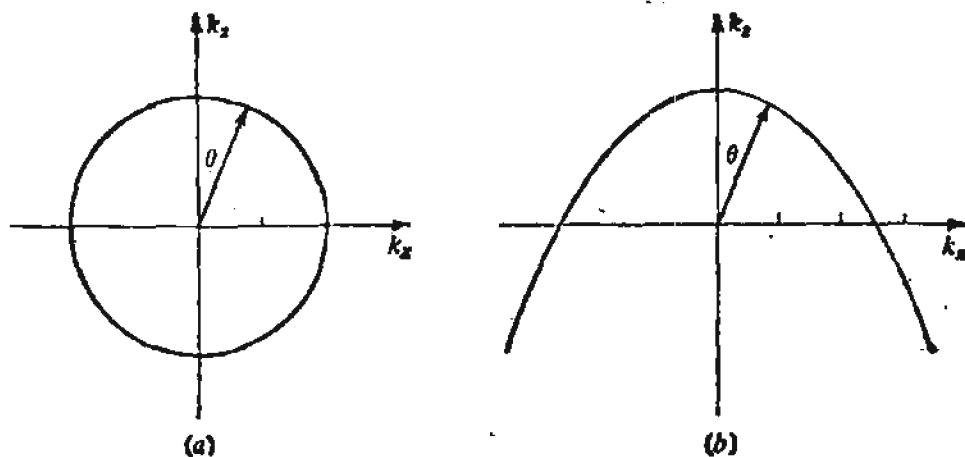


图 10-8

波动方程容许的波数图解(a)。单程波动方程容许的波数图解(b)。

元的关系。整理一下 (10-3-7)，求微商，有

$$Q = P e^{-i\bar{m}z} \quad (10-3-11a)$$

$$Q_{xx} = P_{xx} e^{-i\bar{m}z} \quad (10-3-11b)$$

$$Q_z = (P_z - i\bar{m}P) e^{-i\bar{m}z} \quad (10-3-11c)$$

把 (10-3-11b) 和 (10-3-11c) 代入 (10-3-10)，消除指数，得出方程

$$P_{xx} + 2i\bar{m}(P_z - i\bar{m}P) = 0$$

$$P_{xx} + 2i\bar{m}P_z + 2\bar{m}^2P = 0 \quad (10-3-12)$$

我们称它为单程波动方程。对于笛卡儿坐标中任一常系数偏微分方程，通用的求解方法是代入复指数  $e^{(ik_x x + ik_z z)}$  作为试探解。如果得出来的  $k_x$  和  $k_z$  是实的，那么这个试探解可解释为在  $k = (k_x, k_z)$  方向传播的一个平面波。把这指数代入波动方程 (10-3-1)，也代入单程波动方程 (10-3-12)，消除指数，我们得出两个表示频散（色散）关系的代数方程。它们是

$$-k_x^2 - k_z^2 + m^2 = 0 \quad (10-3-13)$$

$$-k_x^2 - 2\bar{m}k_z + 2\bar{m}^2 = 0 \quad (10-3-14)$$

这两个方程在图10-8的 (a) 和 (b) 中分别作了图解。

波动方程的频散关系图解是一个圆，描绘了任一方向波数的大小，即  $(k_x^2 + k_z^2)^{1/2}$ ，等于常数  $\omega/v$ 。然而，对于单程波动方程，情况就变化了。此时，对小的角度  $\theta$  只近似地有  $k_x^2 + k_z^2 \approx \omega^2/v^2$ 。图 10-8a 从几何上表明 (10-3-14) 是关于  $z$  的一个初值问题，因为图 10-8 a 相应于任一  $k_x$  给出了两个  $k_z$  的值，而图 10-8b 对  $k_z$  只给出一个值。图 10-9，图 10-10，图 10-11 和图 10-12 描绘了波动方程传输函数  $e^{ik_z z}$  和它的近似  $e^{i\hat{k}_z z}$ ，以及它们的付里叶变换。

我们所需要的，是图 10-13 所示的具有半圆频散关系的单程波动方程。对于这个半圆，其方程是

$$k_z = \sqrt{m^2 - k_x^2} \quad (10-3-15)$$

这是在光学上用于外推的基本关系式。用二项式展开，(10-3-15) 可写为

$$k_z = m \left( \frac{1 - k_x^2}{2m^2} - \frac{k_x^4}{8m^4} + \dots \right) \quad (10-3-16)$$

这个展开式对所有的  $0 < k_x < m$  都收敛。

受到 (10-3-16) 的启发，我们联想到以半圆为其频散关系的偏微分方程，可写成

$$\partial_z P = im \left( 1 + \frac{\partial_{xx}}{2m^2} - \frac{\partial_{xxxx}}{8m^4} + \dots \right) P \quad (10-3-17)$$

显然，把平面波  $\exp(i k_x x + i k_z z)$  代入 (10-3-17)，立即得出所需要的半圆频散关系 (10-3-16)。因此，角的精确度要求愈高，参加计算的 (10-3-17) 的项就要得愈多。如速记一样，我们可把 (10-3-17) 简记为

$$\partial_z P = i(m^2 + \partial_{xx})^{1/2} P \quad (10-3-18)$$

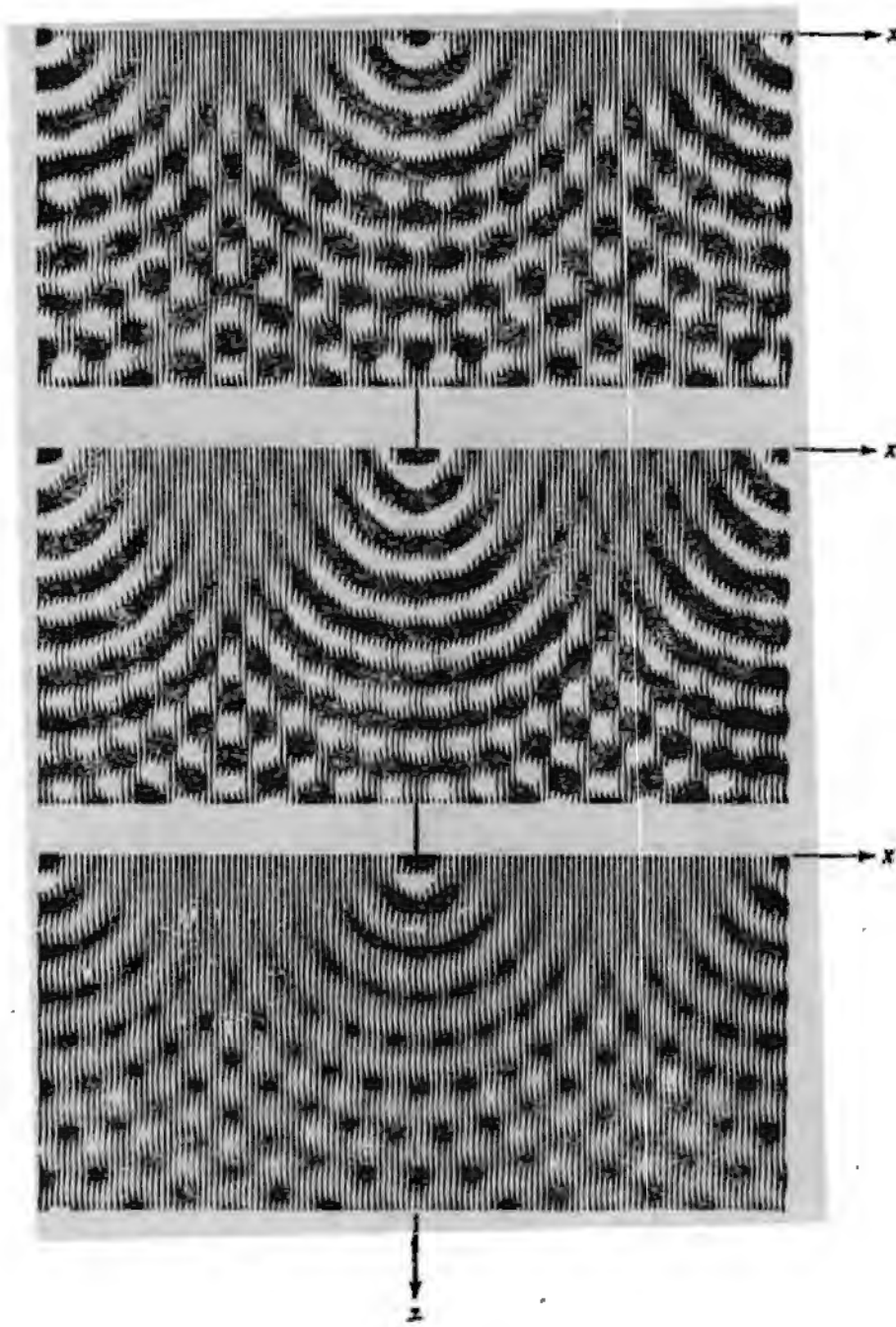


图 10-9

单色波动方程传输函数(快照)。对  $k_x$  求付里叶和。在精确的波动方程传输函数  $\exp[i(1 - k_x^2 v^2 / \omega^2)^{1/2} \omega z / v]$  上求和, 对一固定频率  $\omega_0$  在  $(x, z)$  平面上做的显示(见上图)。中图是在  $15^\circ$  近似的传输函数  $\exp[i(1 - k_x^2 v^2 / 2\omega^2) \omega z / v]$  上求和的显示。下图是练习 2 的  $45^\circ$

近似的  $\exp\left[ i \frac{\omega}{v} \frac{4\omega^2 - 3k_x^2 v^2}{4\omega^2 - k_x^2 v^2} z \right]$  上求和的显示。实际照片照的是

穿过一些等间隔地排在  $X$  轴上的小孔的波。

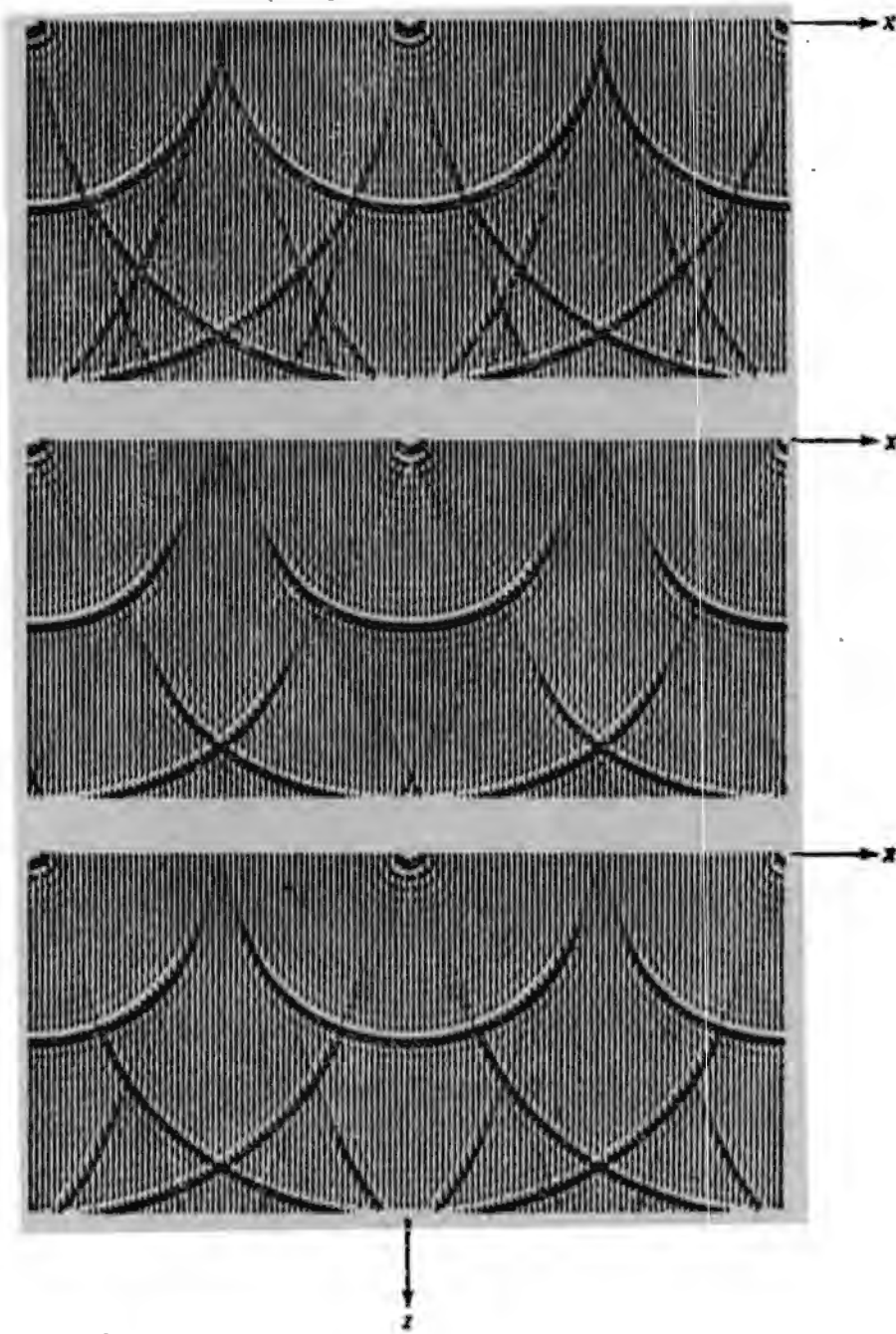


图 10-10

依赖于时间的波动方程的传输函数及其近似(快照)。图10-9中的函数，是对  $k_x$  和  $\omega$  求二重付里叶和，于一固定时间在  $(x, z)$  平面上的显示。

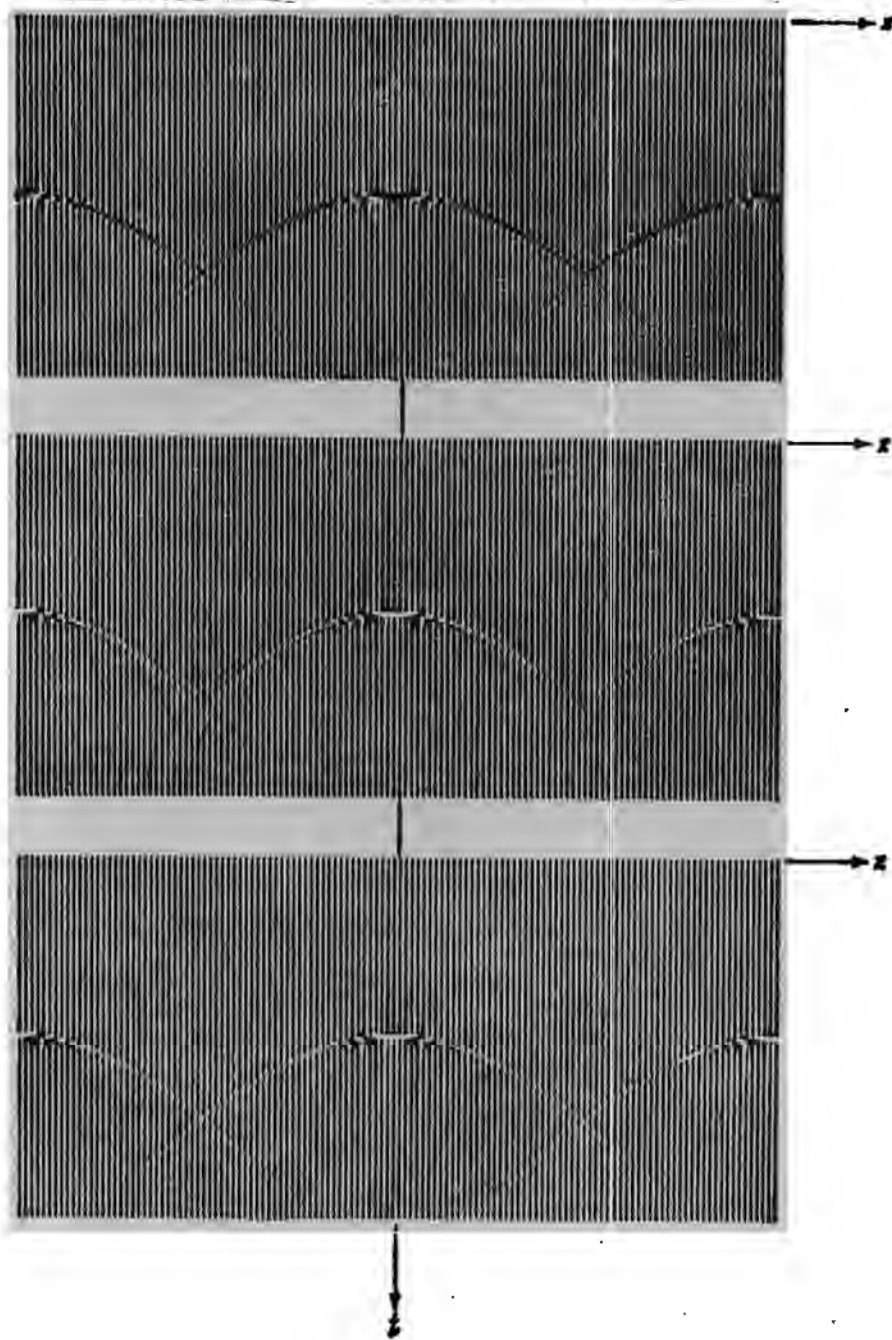


图 10-11

波动方程传输函数及其两种近似的地震共炮点道集类型的显示。有波动方程传输函数的精确形式，和  $15^\circ$  近似和  $45^\circ$  近似的形式，皆对  $k_x$  和  $\omega$  求了付里叶和。由于用了地震共炮点道集类型显示，我们看到的是对一固定  $Z$  的  $(x, t)$  平面显示。精确解（上图）是沿着一双曲线的  $\delta$  函数， $15^\circ$  近似（中图）则是一抛物线。近似解比这精确解更快地随着角度的增加而衰减。

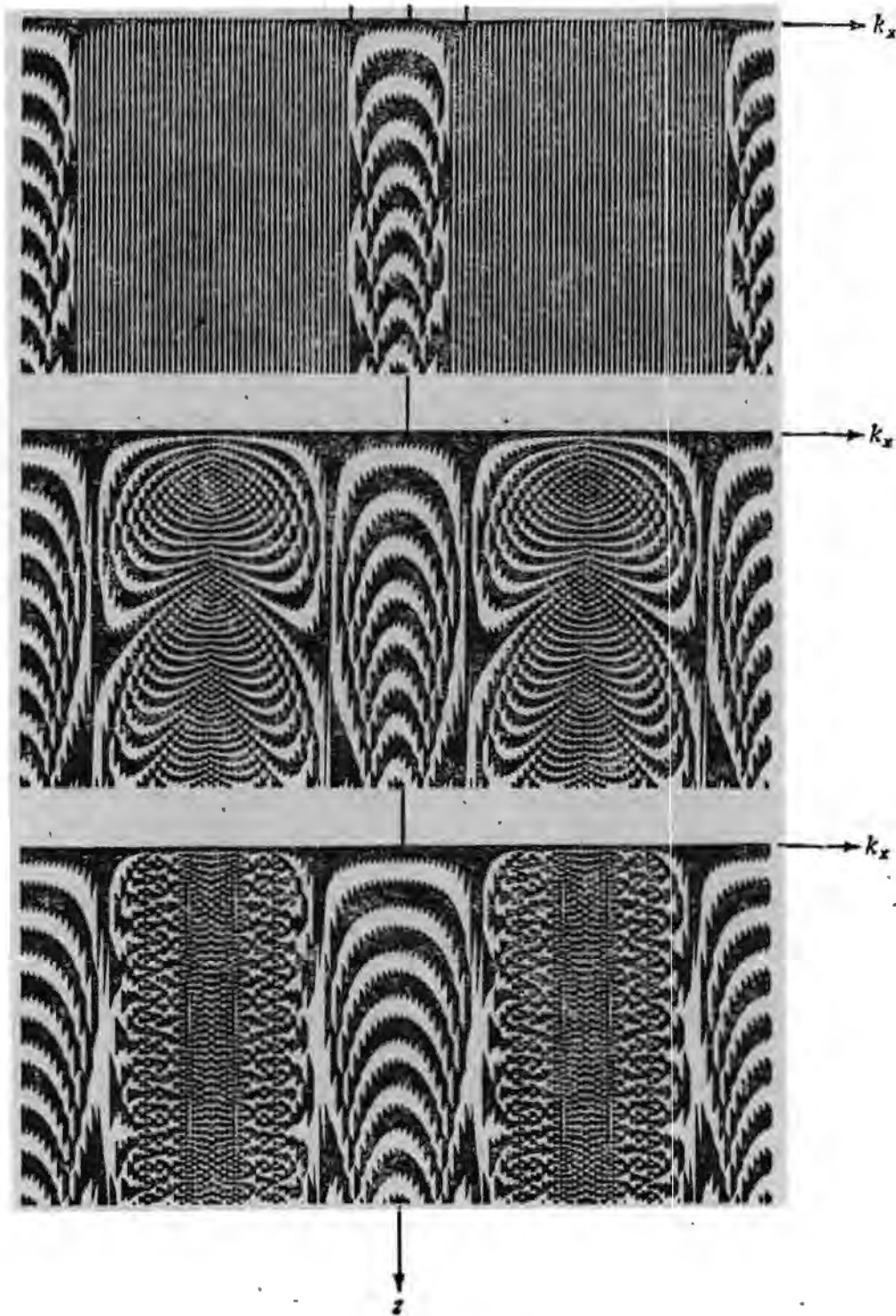


图 10-12

单色波动方程传输函数在  $(k_x, z)$  平面上的显示。仅表现了其实部。上图是精确的传输函数。注意，在  $|k_z v / \omega| = |\sin 90^\circ| = 1$  的地方突然消散了。对  $k_z > \omega/v$  的指数衰变在靠近  $z = 0$  的地方可觉察出来。 $15^\circ$  近似（中图）和  $45^\circ$  近似（下图）是全通滤波器，用一有趣的设计把消散区填补了。为了在上述这两个图片上，把在空间域内大量的短的水平波长的模模糊糊的东西取消掉，曾用了阶梯函数把这消散区消除了。在数据处理应用中，有时近似的传递函数可能由于做一次扇形滤波而增强了（见参考文献36）。

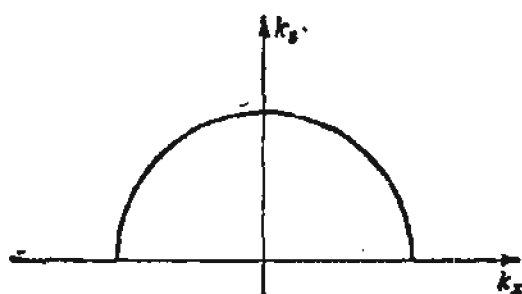


图 10-13

理想的单程波动方程的频散关系是半圆

这对我们没有太多帮助，不过，由此看出，(10-3-18) 是相对论中的舒丁格方程。

从 (10-3-18) 容易求得波动方程。只要对  $z$  求微分

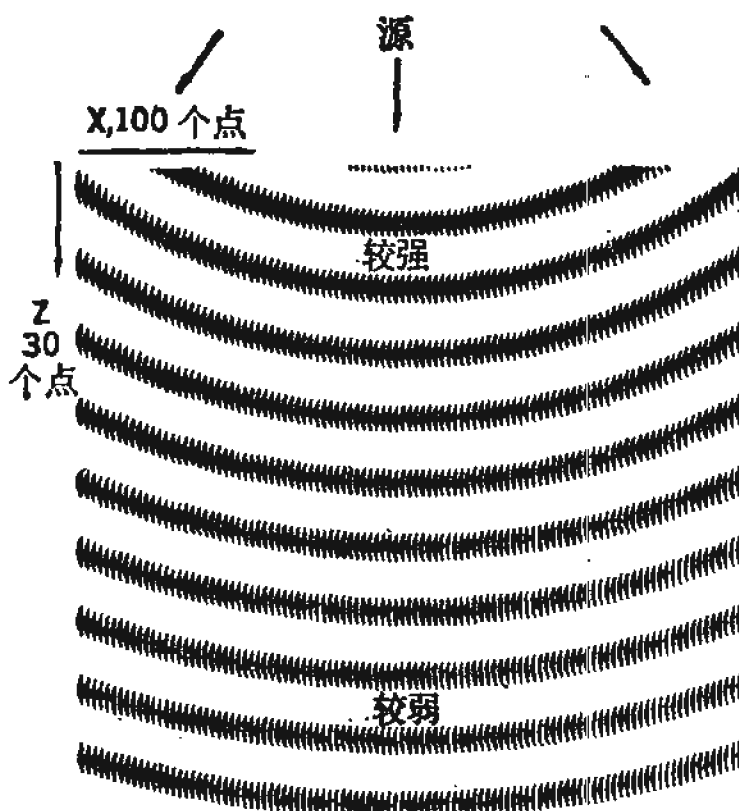


图 10-14

扩展中的单色圆柱形波。波前是振幅逐渐下降的同心圆。计算采用解析解，自图的顶部开始，取 100 个点的直线网格。运用差分方程，顺着网格一步步往下进行，经 30 步就完成了整个图形。每一点大概需做 6 次复数乘法。虽然借用了多道地震记录绘图仪，但显示的是  $(x, z)$  平面(取自参考文献 3, 第 408 页)。



$$\partial_{zz}P = i\partial_z(m^2 + \partial_{xx})^{1/2}P$$

$m$  与  $z$  无关，我们可以交换微分次序

$$\partial_{zz}P = i(m^2 + \partial_{xx})^{1/2}\partial_zP$$

代入 (10-3-18)

$$\begin{aligned}\partial_{zz}P &= -(m^2 + \partial_{xx})^{1/2}(m^2 + \partial_{xx})^{1/2}P \\ &= -(m^2 + \partial_{xx})P\end{aligned}$$

这就是要求的波动方程。

图10-14，图10-15，和图10-16表示的是在均匀介质中抛物线逼近的波动方程的有限差分解。

下面，我们转到当物质速度存在空间变异时，使用抛物线逼近的问题。本节的练习对此已有细致的考虑，不过，我

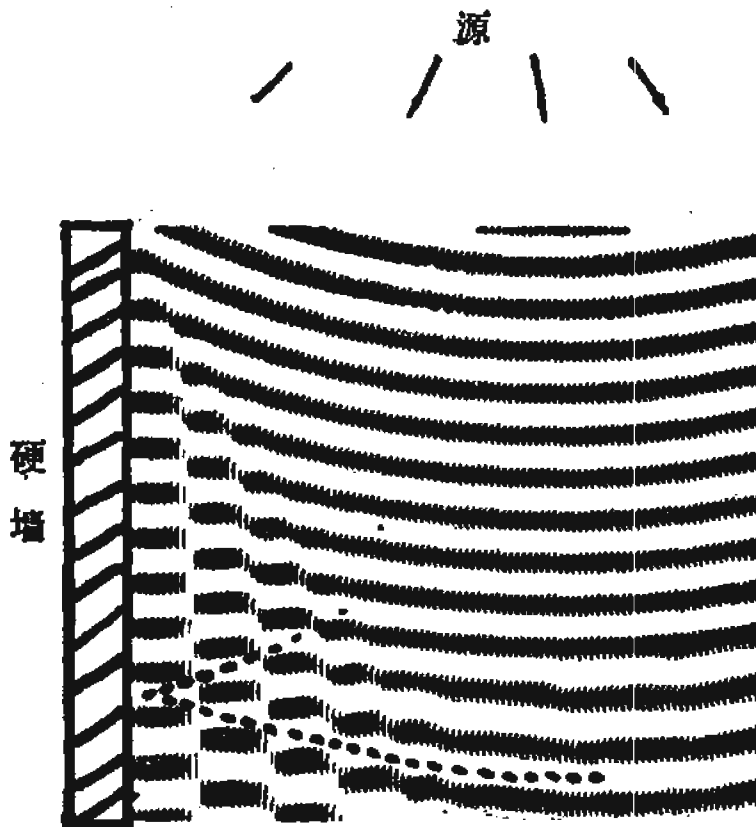


图 10-15

和图10-14相似，只不过左边界是堵硬墙。可以看见波从边界反射回来进入介质。反射的波前由两条虚线中较短的一条标明（取自参考文献3，第409页）。

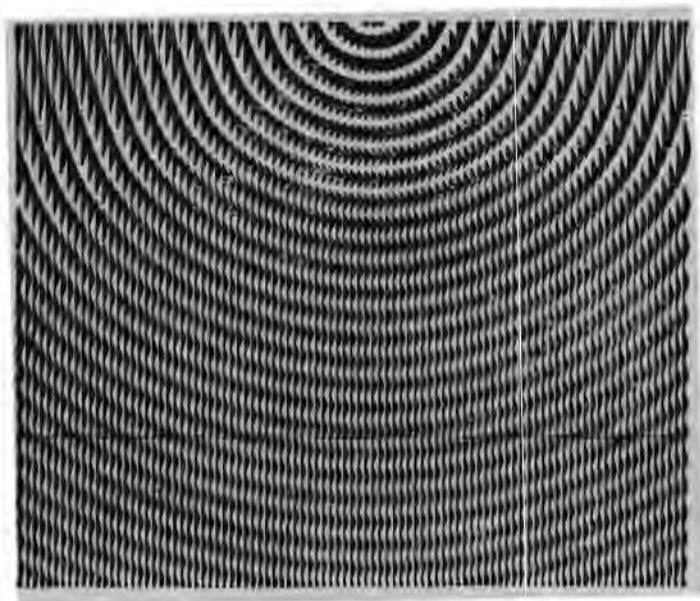


图 10-16

扩展中的圆柱形波。在顶部边界上采用理论解，并用练习 2 的方程向下外推。其波前并不象设想用 (10-3-18) 计算出来的那样圆。还要注意。理论上的按  $r^{-1/2}$  振幅衰减，对于偏离垂线  $60^\circ$  以上的波没有表现出来。波衰减渐慢下来的现象的产生，是由于在  $60^\circ$  地方，相位曲线比圆较为平坦(取自参考文献 5，第 476 页)。

们能够很容易地在 (10-3-9) 上做些改进。主要的想法是用抛物线来近似一个圆；圆的实际半径与这近似没关系。这就引起了一个设想：(10-3-12) 或 (10-3-14) 或许可能如 (10-3-17) 那样用  $m$  来替代  $\bar{m}$ ，因此，(10-3-12) 将是

$$P_{xx} + 2im(x, z)P_z + 2m^2(x, z)P = 0 \quad (10-3-19)$$

有了 (10-3-19)，我们就不再需要假定  $m \approx \bar{m}$ ，所以，对于速度我们就能够取很宽的范围了。实际上，象练习里表明的那样，(10-3-19) 的有效性也有赖于这么一个近似，即物质速度的空间梯度的对数比波的梯度的对数要小。换句话说，即波比物质变化得快。

图 10-17，图 10-18 和图 10-19 表明波在非均匀物质中的传播。

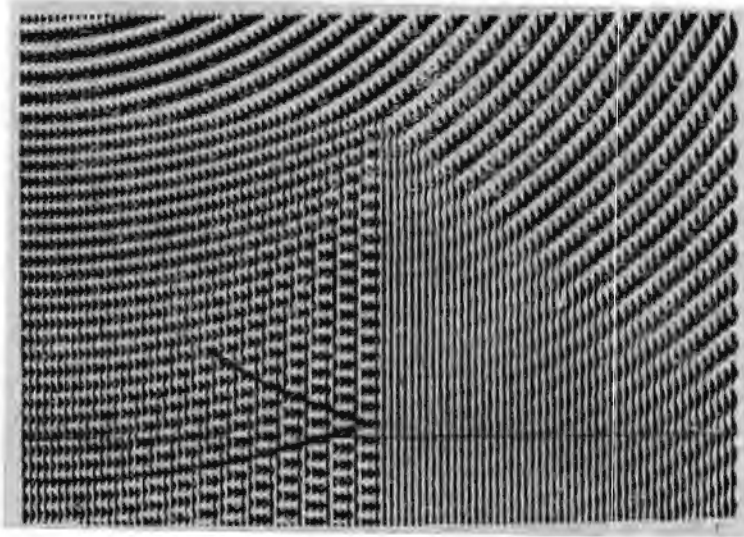


图 10-17

低速物质潜块上波的撞击。波从潜块的顶部进入，从潜块的边上全部向内反射回来，在潜块外边留下了一个影子（取自参考文献5，第474页）。

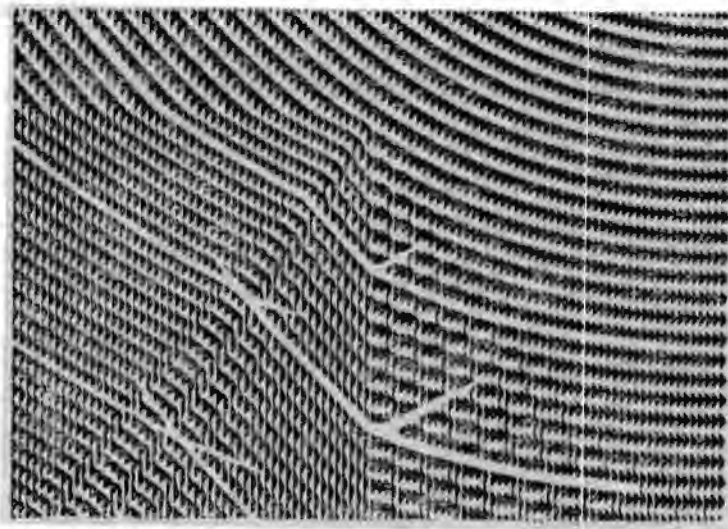


图 10-18

从边上照射一个低速块，块的边上有部分的反射，通过不同的面进入低速块的波产生了干涉（取自参考文献5，第474页）。

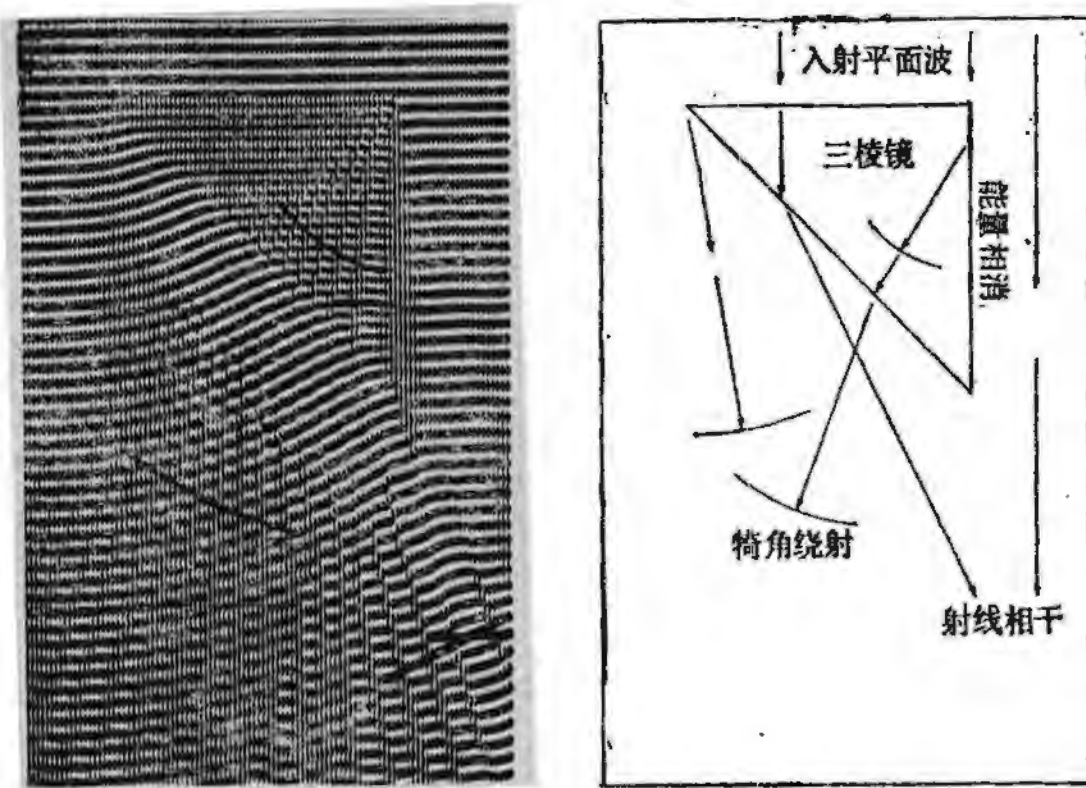


图 10-19

平面波透过一个正  $45^\circ$  的三棱镜传播。波从图的顶部入射。在三棱镜内看出波长缩短了。当波透过三棱镜出来时，向图的右侧下弯。出镜时，波的振幅增大，因为它们被压缩在一束较窄的光束里了。在底部右边，它们和那些沿着三棱镜边上过来的波干涉，形成振幅调制。弯曲的波前是从三棱镜犄角来的绕射造成的。特别有趣的是来自右上角的绕射。顺着图的右边观看图的边缘，看得最为清楚，这个绕射的能量与沿着三棱镜的右铅垂边传下来的波抵消了（取自参考文献 5，第 475 页）。

这种近似在高频（短波长）部分特别好，是在波理论中都要讲到的。虽然有时候把它叫做射线逼近，但不至于退化到几何光学去。实际上，所有物理光学现象（例如：干涉、绕射、和有限大小的焦点）都是有的。所以我们根本不需要进入物理光学。有几个练习包括了在低频率项中求得速度梯度的例子。实践中，究竟应取多少项，这个问题对每一次应用各有其特殊性。

### 练习

1. 变元  $Q$  比变元  $P$  在实用上较有优点，因为  $Q$  随  $z$

坐标变化较慢，故采样时，不必那么稠密，从而可保存计算机的潜力。请用 (10-3-11) 的方法把 (10-3-19) 转换成关于  $Q$  的方程。将结果与 (10-3-9) 作比较。对于这两个方程，哪个更精确些呢？为什么？

2. 有理式  $(1+x)^{1/2} \approx \frac{1+3x/4}{1+x/4}$  给出了一个好的平方

根逼近。问这个近似确立的“单程波动方程”是怎样的？给它的频散关系作一图解。挑选几个传播的角度，与 (10-3-14) 作比较，精度如何？

3. 代数方程  $a+bx+cx^2=0$  有两个根。如果  $b$  充分大，我们可以用线性方程  $a+bx=0$  来逼近最小的那个根。把  $x=-a/b$  代回到二次式，可得对  $x$  仍然是线性的一个改进的逼近

$$a+bx+c\left(\frac{-a}{b}\right)x=0$$

$$ab+(b^2-ac)x=0$$

规定  $k'_z = m - k_z$ ，把  $k_z = m - k'_z$  代入  $k_x^2 + k_z^2 = m^2$ ，求  $k'_z$  的最小根。证明：这样可得出和练习 2 同样的偏微分方程。

4. 令速度  $v = v(x) \neq v(x, z)$  只是  $x$  的函数，记  $m = \omega/v(x)$ ，定义算子

$$O_p = m + \frac{1}{2m} \partial_{xx} - \frac{m_x}{2m^2} \partial_x$$

注意

$$\partial_z P = i O_p P$$

$$\partial_{zz} P = i \partial_z O_p P = i O_p \partial_z P = -O_p^2 P$$

$$(\partial_{zz} + O_p^2) P = 0 = \text{波动方程} + \text{误差}$$

检查每一个误差项，并决定它在：(1)高频部分（把与波长的  $n$  次幂成正比的项收集起来）和 (2) 与  $z$  轴成小角度或大角度的部分，是否重要。

5. 复习关于西勒维斯脱矩阵定理的那一节。矩阵的平方根与算子的平方根有怎样的类比关系？

6. 推演柱面坐标下的“逸出波动方程”。

7. 推演球面坐标下的“逸出波动方程”。

8. 练习 3 给出了一良好的宽角度近似。而第 4 题情况为  $m = m(x)$ ，要把第 3 题的方法利用到  $m = m(x)$ ，必须注意，虽然  $\hat{b}x - xb = 0$ ，但只当  $m \neq m(x)$  时， $(m\partial_x - \partial_x m)P = 0$  才成立。试尽可能避免运用可交换性，仍采用练习 3 的方法。

9. 考虑一个在一不完整球面的表面上传播的面波。推演几乎是沿赤道传播的波的方程，一阶对  $\phi$ ——经度坐标，二阶对  $\theta$ ——纬度坐标。假定所有的量都与径向坐标轴无关。

10. 修改第 10-1 节第 4 题中的程序，以计算 (10-3-10) 的解。需要温习一下复算法的编译约定。还有，算出  $Q(x, z)$  之后，乘以  $e^{imz}$ ，得出  $P(x, z)$ ，只把  $P(x, z)$  的实部打印出来。此结果的物理解释是，在一个不透明的屏幕的边缘后边的光，向阴影带发出绕射波，如果你在显示时有意安排让输出为  $\Delta z = \Delta x$ ，此绕射波就应该有半圆形的波前。

11. 令  $Z = e^{ik_x \Delta x}$  表示  $x$  坐标的离散化。规定  $A(Z) = \sum a_n Z^n$  其中  $a_n$  满足下列关系式

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( Z^n + \frac{1}{Z^n} \right) = |k_x| \quad \text{当 } |k_x| \Delta x \ll \pi$$

证明

$$\frac{\partial P(Z)}{\partial z} = \pm A(Z)P(Z)$$

的任何一个解皆是拉普拉斯“微分”方程  $P_{xx} + P_{zz} = 0$  的解。这些解能用于作向上和向下的延拓。

#### 10-4 时倚波形在空间的外推

在第10-3节,我们学习了单色波在空间的外推。对时倚波形在空间进行外推,我们可以先对它作付里叶变换,化成一些单色波,然后用前一节的方法把这些单色波外推。最后,再用付里叶变换,把外推结果变回到时间域里。因此,尽管本节在原则上和上一节求解的是同一问题。不过在这一节,我们将提出一个直接的时间域方法,从实用角度来讲,是个可取的方法。虽然研究时间域比研究频率域(所有时间点放在一起考虑,但各频率之间可分别进行分析)势必要复杂得多,可是在时间域的研究过程里,将可获得更多的了解,尤其是在因果关系方面。我们将会发现,波外推过程类似于做一次滤波(事实上,就是一种特种类型的多维全通滤波),且滤波器的反馈部分必定是最小相位。在时间域中要作两个独立的推导。

第一个推导,先把标量波动方程

$$0 = P_{xx} + P_{zz} - v^{-2}P_{tt} \quad (10-4-1)$$

变换到一个以速度  $\bar{v}$  沿  $Z$  轴平移的坐标系中。通常取速度  $\bar{v}$  等于或大于  $v$ 。无论能量在固定的坐标系里按哪条途径传播,当在这滑动的坐标系中看见这能量时,它保持平稳或后退。

坐标变换

$$x' = x \quad (10-4-2a)$$

$$z' = \bar{v}t - z \quad (10-4-2b)$$

$$t' = t \quad (10-4-2c)$$

见图10-20所示,取 $\bar{v} = v$ 。在带撇的坐标系中,所有的波在正 $z'$ 方向都有速度分量。对于固定的 $z'$ ,如果对所有的 $x'$ 已知现时和过去的 $P$ 的值,便足以确定 $P$ 在 $(x', z' + \Delta z')$ 现时和过去的值,因为在 $z' + \Delta z'$ 的情况,早在 $z'$ 就要有反映。因此,由于限制了 $\bar{v} \geq v$ ,我们可以指望那将用来在正 $z'$ 方向对 $P$ 进行外推的线性算子应该是表因的。令 $P'$ 表示

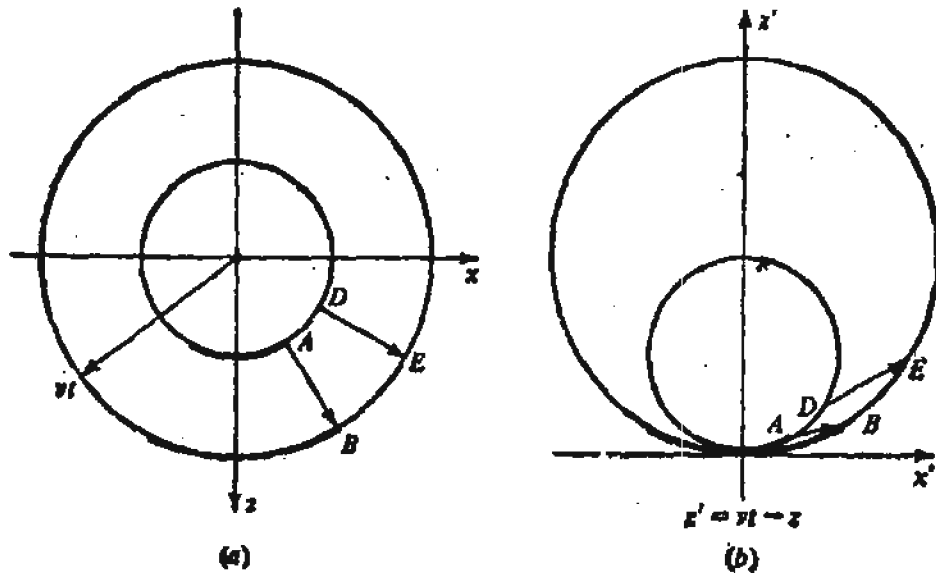


图 10-20

按 (a) 固定坐标 (左图) 和按 (b) 以波速顺  $z$  方向平移的坐标 (右图) 扩展的球面波。

滑动坐标系中的扰动, 我们有

$$P(x, z, t) = P'(x', z', t') \quad (10-4-3)$$

用下标来表示偏微商比较方便。显而易见

$$P_x = P'_{x'} \quad (10-4-4)$$

及

$$P_{xx} = P'_{x'x'}$$

还有



$$P_z = P'_{x'x'z} + P'_{z'z'z} + P'_{t't'z} = -P'_{z'}$$

所以

$$P_{zz} = P'_{z'z'} \quad (10-4-5)$$

且

$$P_t = P'_{x'x't} + P'_{z'z't} + P'_{t't't} = \bar{v}P'_{z'} + P'_{t'}$$

所以

$$\begin{aligned} P_{tt} &= \bar{v}(\bar{v}P'_{z'z'} + P'_{t'z'}) + \bar{v}P'_{z't'} + P'_{t't'} \\ &= \bar{v}^2 P'_{z'z'} + 2\bar{v}P'_{z't'} + P'_{t't'} \end{aligned} \quad (10-4-6)$$

现在我们可以把(10-4-4)、(10-4-5)和(10-4-6)代入(10-4-1), 得

$$\begin{aligned} P'_{x'x'} + \left[1 - \left(\frac{\bar{v}}{v}\right)^2\right] P'_{z'z'} - 2 \frac{\bar{v}}{v^2} P'_{z't'} \\ - \frac{1}{v^2} P'_{t't'} = 0 \end{aligned} \quad (10-4-7)$$

我们只考虑恒速的情形  $v(x, z) = \bar{v}$ 。  $v \neq \bar{v}$  的情形留作练习。在(10-4-7)中, 我们主要感兴趣的是和那些以近似于新(滑动)坐标系的速度传播的波。在滑动坐标系中, 这些波是靠近零频率的多普勒频移(doppler shifted)。这件事使我们想到从(10-4-7)中略去  $P'_{t't'}$  项。所以, (10-4-7)成为

$$P'_{t'z'} = \frac{v}{z} P'_{x'x'} \quad (10-4-8)$$

我们对时间坐标做付里叶变换, (10-4-8)方程成为  $-i\omega P'_{z'} = (v/2) P'_{x'x'}$ , 这等同于前一章中导出的单色方程

$$Q_{xx} + 2imQ_z = 0$$

所以, 扔掉  $P'_{t't'}$  项, 就是大家所熟悉的用抛物线来近似

一个圆。

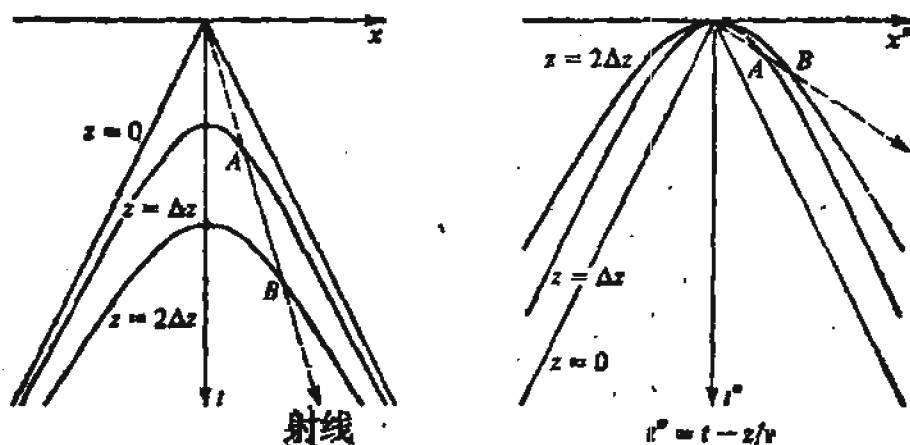


图 10-21

在  $x=0, z=0, t=0$  的点光源。左图双曲线指的是在  $z=0, \Delta z, 2\Delta z$  的到达时间  $t$ ，当时间如  $t'' = t - z/v$  是位置的函数时，到达时间  $t''$  如右图所示。能量在  $+t''$  方向运动，因为在波前  $z = vt \cos\theta$ ，我们有  $t'' = t - z/v = t(1 - \cos\theta)$ 。

用计算机求解(10-4-8)时，我们可以按下述两个观点中的任意一个进行。第一个观点是： $P'$ 已在  $x'$  和  $z'$  网格上规定好了初值，该方程用来对  $t'$  做外推。第二个观点是： $P'$ 已在  $x'$  和  $t'$  网格上规定好了初值，这样，(10-4-8)是用来对  $z'$  做外推。

在对(10-4-8)提出数值的解法之前，我们还可用一完全不同的坐标变换对它进行推导。我们取一个相应于旧坐标系的固定在空间的新坐标系。然而，新坐标系中，在空间的每一个点上用一个不同的时钟。所有的时钟都以同一速率运行，不过，它们的起始时间要这样来调拨：使得顺  $+z$  方向旅行的平面波在各时钟上能测量出同样的到达时间（这有点象一架向西飞行的喷气式飞机似的）。变换的公式为

$$x'' = x \quad (10-4-9a)$$

$$z'' = z \quad (10-4-9b)$$

$$t'' = t - \frac{z}{v} \quad (10-4-9c)$$

图10-21表示了在 $(x, z, t) = 0$ 发出的一个扰动。把时间基准定为最先可能发射射线的时间，对计算较为方便。这意味着波的到达时间不会越出有限的——或短的——在它上面定义了波组的计算网格以外。定义 $P''$ 为新坐标系中的扰动，其中

$$P(x, z, t) = P''(x'', z'', t'') \quad (10-4-10)$$

和前面做法一样，可得出

$$P_{xx} = P''_{x''x''} \quad (10-4-11)$$

$$P_{zz} = P''_{z''z''} - 2v^{-1}P''_{t''z''} + v^{-2}P''_{t''t''} \quad (10-4-12)$$

$$P_{tt} = P''_{t''t''} \quad (10-4-13)$$

把这些代入波动方程(10-4-1)，得

$$P''_{t''z''} = \frac{v}{2}(P''_{x''x''} + P''_{z''z''}) \quad (10-4-14)$$

(10-4-14)的最后一项对于离 $z$ 轴以小角度旅行的波来说，是相对的小量，这使人想到，对于在 $+z$ 方向的波，波动方程的解是一任意函数 $f(t - z/v) = f''(t'')$ 。所以， $\partial f''/\partial z''$ 对于沿着 $z''$ 轴传播的波就消失了。去掉 $P''_{z''z''}$ ，(10-4-14)简化为

$$P''_{t''z''} = \frac{v}{2}P''_{x''x''} \quad (10-4-15)$$

这是与(10-4-8)相同的方程。对它们之中的任意一个利用 $e^{-i\omega t}$ 时间依赖关系，便得出方程(10-3-10)，我们曾用它作单色波的外推。另一个观点是，在单色波方程中仅以 $\partial_t$ 替换 $-i\omega$ ，就可得到本章的时倚方程。

现在我们对(10-4-8)或(10-4-15)的解法提出一个差分格式。把撇号去掉。令  $j\Delta t$  为时间。  $n\Delta z$  为坐标  $z$ 。令  $\delta$  表示一差分算子，  $P_j^n$  为  $n$  和  $j$  的各个值上的矢量。顺着这矢量向下，是沿着  $x$  轴的压力值。使用矩阵代数，我们可避免对  $x$  依赖关系写一个下标。用  $T$  表示一个在对角线上具有负的二阶差分算子  $-(1, -2, 1)$  的三对角线矩阵。有了这些规定，(10-4-8)或(10-4-15)便成为

$$\delta_z \delta_t P_j^n = -\frac{v \Delta z \Delta t}{8 \Delta x^2} T_4 P_j^n \quad (10-4-16)$$

记  $a = v \Delta z \Delta t / 8 \Delta x^2$ 。现在我们必须更确切地决定在(10-4-16)中要使用什么样的二阶差分逼近。我们将采用克瑞安克-尼可逊格式，它等于双线性变换式。先做中心时间差分

$$\delta_z (P_{j+1}^n - P_j^n) = -a T_2 (P_{j+1}^n + P_j^n)$$

然后做中心空间差分

$$(P_{j+1}^{n+1} - P_j^{n+1}) - (P_{j+1}^n - P_j^n) = -a T (P_{j+1}^{n+1} + P_j^{n+1} + P_{j+1}^n + P_j^n) \quad (10-4-17)$$

从计算的观点来看，我们假定  $P_{j+1}^{n+1}$  未知，而其它的都已知。把未知量移到左边，把已知量移到右边，我们有

$$(1 + aT) P_{j+1}^{n+1} = P_j^{n+1} + P_{j+1}^n - P_j^n - aT (P_j^{n+1} + P_{j+1}^n + P_j^n) \quad (10-4-18)$$

对于每个  $n$  和  $j$ ，右边成了一个已知矢量。左边是三对角线矩阵  $(1 + aT)$  乘以未知矢量  $P_{j+1}^{n+1}$ 。这些方程的求解极为简单，可以象在第10-1节中对热传导方程所做的那样来做。 $x$  里的边界条件包含在  $T$  的端点上。对于  $z$  和  $t$  边界条件，在所有  $x$  上，对所有的  $n$  给出  $P_0^n$ ，对所有的  $j$  给出  $P_0^j$ ，就足够了。当然也可能有别的边界布局。

稳定性问题是一个十分重要的问题。我们现在要论定，(10-4-18)递推对  $\alpha$  的任一正值都是稳定的。如果  $T$  的特征值和特征向量都为已知，如果所有的  $P_j$  已按  $T$  的特征向量展开了，那么，(10-4-18)就会分解成许多个独立的方程， $T$  的每一个特征向量有一个方程。 $T$  的特征向量具有形为  $x$  的正弦函数的分量。如果  $x$  有边界，就允许有一组离散的频率，不然，便是连续的。要明白这一点，可观察一下，在无边界的情况下， $TP$  是  $e^{ik_x m \Delta x}$  与  $(-1, 2, -1)$  的褶积，给出

$$(-e^{ik_x \Delta x} + 2 - e^{-ik_x \Delta x}) e^{ik_x m \Delta x}$$

因此，特征值是  $2 - 2\cos k_x \Delta x = (2\sin k_x \Delta x / 2)^2$ 。由于任一特征值必定在 0 和 4 之间，所以我们研究(10-4-18)在其向量  $P_j$  已成为  $k_x$  的标量  $P_j$  函数，以 1 替代  $l$ ， $T$  (0 至 4 之间的任意数) 替代  $T$  的情况就够了。可以证明，在能量保守边界条件下，特征值也是在 0 和 4 之间。现在，假定对所有  $j$ 、在  $n$  的某一个别值上、 $P_j$  为已知，我们要查究一下  $P_{j+1}$  对所有  $j$  的稳定性。现在，在(10-4-17)里，把未知量都搬到左边

$$(1 + \alpha T) P_{j+1} - (1 - \alpha T) P_{j+1} = (1 - \alpha T) P_{j+1} - (1 + \alpha T) P_j \quad (10-4-19)$$

(10-4-19)中，关于稳定性，就是要证明：当不断增加  $j$  时， $P_{j+1}$  的系数不会大于  $P_{j+1}$  的系数；若是减小  $j$ ，则情况相反，稳定性可以用前面几章讨论过的  $Z$ -变换方法来研究，所谓(10-4-19)的  $Z$  变换就是指

$$\begin{aligned} & [(1 + \alpha T) - Z(1 - \alpha T)] P(Z)^{n+1} \\ & = [(1 - \alpha T) - Z(1 + \alpha T)] P(Z)^n \end{aligned} \quad (10-4-20)$$

的  $Z$  的系数给出了(10-4-19)，从  $P(Z)^n$  计算  $P(Z)^{n+1}$  的滤波函数是

$$\frac{(1-aT) - Z(1+aT)}{(1+aT) - Z(1-aT)} \quad (10-4-21)$$

我们看到，对于正的  $a$  和对于在 0 和 4 之间所有的  $T$ ，分母是个最小相位多项式。这意味着，(10-4-19) 蕴含的时间递推是稳定的。而 (10-4-21) 具有全通滤波器的形式，这又意味着，对  $n$  的深度递推也是稳定的。

我们刚才给出了稳定性的证明。读者肯定地可以发现，在他自己的应用中所涉及的方程与我们讨论过的可能不完全相同，也许  $v = v(x, z)$ ，或是提高了角度的精度。对于这些情况所提出的有关外推的稳定性问题，我们能给出些什么样的一般性建议呢？一开始，如果感到一切情况都很顺利，这就很好。然后，如果计算中出现了困难，多半是出在那些不被怀疑的值，如  $\omega$ 、 $k_x$  或  $k_z$ ，或其比率上。注意到 (10-4-15) 在付里叶变换域是

$$\omega k_z = -\frac{v}{2} k_x^2 \quad (10-4-22)$$

如果打算在  $z''$  方向外推，本质上是要形成  $\exp(ik_z z'')$  或  $\exp(-ik_x^2 z''/\omega)$ 。读者应该回忆有关全通滤波器和谱因式分解方面的一切重要事实。当波的传播归为全通滤波模型时，又如果该全通滤波器假定为可实现的或是表因的，那么，相位微商或群延迟对所有的频率都该是正的。在现在的情况下，对相位求微商，我们有

$$\frac{d}{d\omega}(k_z z) = -z \frac{v}{2} k_x^2 \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{\omega} \right) = z \frac{v}{2} \frac{k_x^2}{\omega^2} \quad (10-4-23)$$

正如所需要的那样，它对所有的  $\omega$  及  $k_x$  都是正的。这一事

实是重要的。但仅仅对  $\omega$  和  $k_x$  的值为正，实用上仍有不足之处。如果对某一个  $\omega$  或  $k_x$  的值，群延迟是负的，那么，时间域外推公式就会失败。

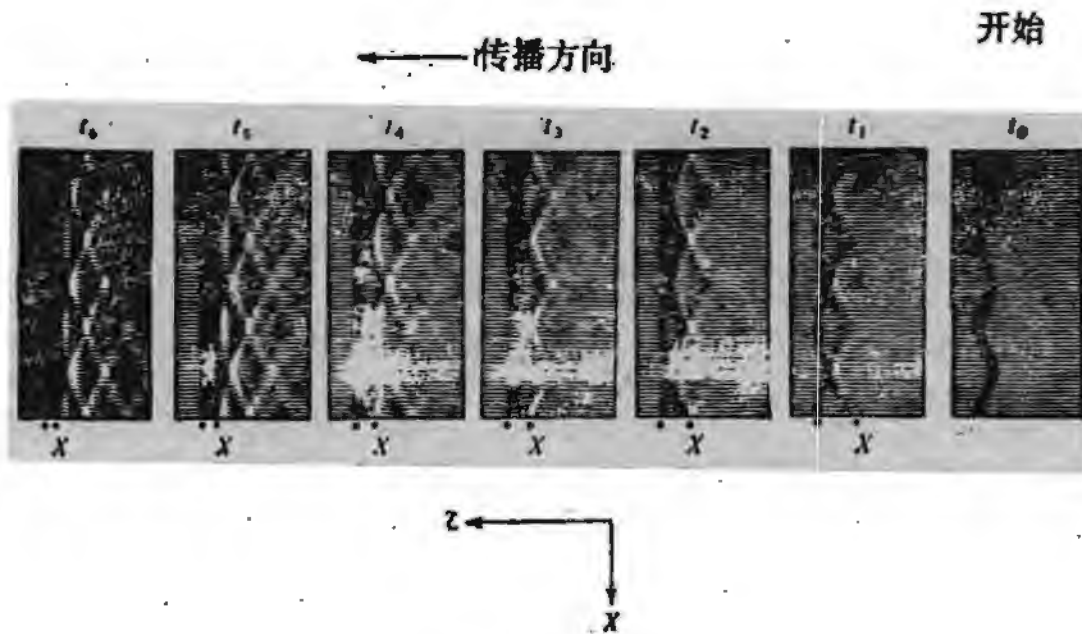


图 10-22

均匀介质中传播的有扰动的平面波。这种有扰动的平面波在传播中，其初至会自行恢复为平面波。但波的尾部却越来越复杂，而且能量越来越强。在尾部，能量从初至往后移动，而相位前点（标以  $X$ ）则向前移动。光束导入信号处理办法（对  $x$  坐标求和）可增强初至信号，但会破坏晚到的信号（尾部）。虽然这个计算是从  $t_0$  帧到  $t_6$  帧进行的，也可以反过来做，从  $t_6$  开始到  $t_0$  结束。把时间重列成一行后，在  $t_0$  帧作光束导入处理能够把所有的信号能量都收集起来。

最后，我们来看看图 10-22 中的例子。在第一帧图中，平面波的波前变形了，象是在传播中经过了一个在  $x$  方向有周期性变化的速度区域。用光学的术语来说，图 10-22 的第一帧图表现了一个刚从相位光栅透露过来的脉冲平面波。用大气声学的术语来说，扰动也许是由于平面波通过了如图 10-23 所描述的周期性环流气胞而引起的。图 10-22 中其余的几帧说明波形随后的变化。在光学教研书上（例如谷德曼

(Goodman) 的书, 见参考文献35, 第69页), 单色解通常是在无穷远处获得的。最显著的特点是能量从一帧到下一帧在逐步散开。第一帧的单一脉冲到最后一帧已成为一延展了的振荡了。随着时间的推移, 第一个脉冲的能量越来越少, 而在振荡尾巴上则越来越多。另一个惹人注目的特征是: 经过一段较长时间之后, 其初至又再次排齐, 这可以说是, 波前的扰动随着时间的推移会自行恢复。相反, 其尾部却发展成空间的不连贯的波 (这正象大多数观察到的地球物理的波的特性)。

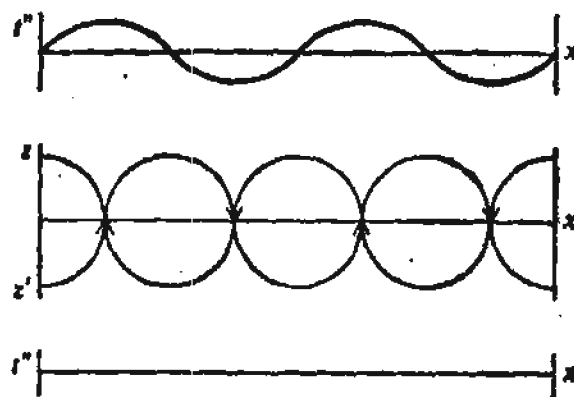


图 10-23

产生受扰动的平面波的方法。下图的入射平面波由于一物质的非均匀性而变形。譬如说, 由于环流的气胞 (中图), 形成了上图的受扰动的波。

我们还可以注意到图 10-22 的几个不显著的方面。虽然能量从初至往后移动, 可是波尾部上常数相位的点 (标以  $X$ ) 却朝前、向着波至 (点) 靠近。还有, 倾斜, 或传播呈现的方向差别, 一帧一帧地趋于增加。这表明: 后到的信号走了较长的射程。再有, 二维焦点的  $\pi/2$  相移可在第 2 帧的  $A$  处看到。

为了在有限的计算网格上表示出对  $x$  范围为无限的扰动, 曾用在边界上具有零坡度的周期性扰动作为初态。于是零坡度边界条件等同于在  $x$  的无限周期性扩展。曾选定  $v \Delta t \Delta z / \Delta x^2 = \frac{1}{2}$  的值, 以便在顺次制作各帧时给出一适当的变差, 图 10-22 的每一帧表示五次计算迭代。由于  $v \Delta t$ 、 $\Delta x$  和  $\Delta z$  的交互依赖关系, 其解可用几种方法重作标度。



由图 10-22, 可看一看各种数据加强的处理。在所谓“光束导入”的处理中, 图 10-22 中的观察值要对  $x$  坐标求和, 以便加强信号、压制干扰。很明显, “光束导入”将加强初至, 同时压制随机干扰。但也削弱振荡尾部的信号能量。所以是不能令人满意的。当  $z'$  或  $t''$  增大时, 情况会变得更加严重。因为信号能量从初始脉冲移向振荡波的尾部去了。常说的伴随“信号产生的噪声”也加强了。如果增强的方法是从全波形来考虑, 而不只限于加强初始脉冲, 能期望得到满意的结果。

### 练习

1. 说明为要把 (10-4-7) 化为

$$[v(z) - \bar{v}]P'_{z'} = P'_{t'}$$

要作哪些假定, 对带双撇的坐标推导类似的方程。

2. 对练习 1 的方程求  $z'$  至  $(z' + \Delta z)$  外推的差分格式。证明: 如果  $\bar{v} > v$ , 则需要过去时间; 如果  $\bar{v} < v$ , 则需要将来时间。

3. 坐标变换

$$x' = x$$

$$z' = z$$

$$t' = t - \int_0^z v^{-1}(z) dz$$

求此坐标下的标量波动方程。

4. 证明: 如果 (10-4-9a)、(10-4-9b) 和 (10-4-9c) 里的变换速度  $\bar{v}$  取一个比波动方程里的  $v$  小的值, 则可得到稳定的差分方程。

5. 请考虑差分方程  $(1 + \delta_{xx}/12)\delta_{zt}P = b\delta_{xx}P$ 。问  $b$  取

什么值，才能使它简化为一显式格式？对这样的  $b$  值，时间递推稳定吗？

## 10-5 光 束 耦 合

我们对地壳内部情况的了解是由于地壳中的界面能把下行波变为上行波而获得的。在成层介质中，数学上严格地将扰动分解成向下走的波  $[\exp(ik_z z)]$  和朝上来的波  $[\exp(-ik_z z)]$  是可能的，不过，目前对二维或三维的非均匀介质还不会作这种分解。我们采用过的种种方法，都有一严格的要求，认为在水平方向没有能量的传播和消失。可是实际上，我们所真正感兴趣的并不只是把波分解成下行和上行的两部分。我们还对近乎平行的光束之间的相互作用的描述感兴趣。在全息中，这就是“入射”光束（或称参考光束）和“散射”光束。在天然地震学上，这便是入射的压缩性波束和散射的切变波束。它们不须在相互之间或对铅垂方向作任何特别的定向。

以前叙述过的波的外推方法，可用来描述与  $z$  轴近乎平行的光束。现在我们提出描述这两种波束之间的相互作用的任务。为了简单起见，我们一开始只取两个近乎是垂直地传播的光束，一个往下走，另一个往上走，在一个平坦的水平界面上相互作用起来。下面提出的方法在一些几何假定较少的情况下是适用的。然而，在更为一般的几何假定下，成果的精度随着情况的不同而不同。对精度的限制来自许多方面，其中包括：

1. 类菲涅耳(Fresnel)逼近中产生的平行光束的速度对角度的依赖；
2. 忽略了渐渐消失的能量；

3. 只用两个平行光束的方程可能描述不了复杂界面上产生的一切重要光束；

4. 用了标量波动方程做有弹性的可压缩的波的近似。

必须以实验工作的准确性、实际问题所需的准确度来估价（精度限制的重要意义），这种估价完全超出了本书的范围。

本节中我们只叙述反射地震勘探中的一次反射的地震波能量。在地球表面用炸药或其它高能震源产生强振幅的波。这些波透入地壳，一小部分能量在地壳的弱反射界面上产生回响，被地面上灵敏的检波器接收到了。偶而有这样的情况，大量的能量散开来、上下好几次（称为多重反射），这将在下一节讨论。对于平面的成层介质，我们可用(9-3-13)方程

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -iab & \\ & iab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \frac{Y_z}{Y} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix} \quad (10-5-1)$$

由于我们要描述的实际情况可满足不等式  $U \ll D$ ，我们将以下列方程作为 (10-5-1) 中第二个方程的近似

$$D_z = iabD - \frac{Y_z}{2Y} D \quad (10-5-2)$$

(10-5-2) 甚至当  $a$ 、 $b$  和  $Y$  都是依赖于  $z$  的变元时，也是适用的。为了对这个方程有物理上的了解，请注意用直接代入法可以证实 (10-5-2) 的解是

$$D = D_0 Y^{-1/2} \exp(i \int_0^z ab dz) \quad (10-5-3)$$

换句话说，“ $iab$ ”控制着波的相位（或速度）， $Y_z/Y$  控制振

幅变化。因此，我们能将  $Y_z/Y$  项解释为提供了一个与穿透系数有关的物理效应。常见到， $ab$  速度信息近似地为已知，而  $Y_z/Y$  中不连续性给出的地壳里界面的位置则完全为未知。这意味着，由于未知的穿透系数的误差会给  $D$  的振幅的计算带来误差。

第10-3节的基本依据，在于把“ $iab$ ”看作微分算子  $-(\omega^2/v^2 + \partial_{xx})$  的平方根来处理非平面波。对于一个与  $z$  轴平行地朝下走的光束，平方根的一级近似是  $i\omega/v[1 + v^2(\partial_{xx}/2\omega^2)]$ 。根据光束垂直向下的假定 ( $\partial_{zz} \approx 0$ )，并令未知的导纳梯度为零，下行波  $D$  能从下式计算出来

$$D_z = \frac{i\omega}{v} D + \frac{iv}{2\omega} D_{xx} \quad (10-5-4)$$

这和我们以前做过的大量工作颇为相似，如果我们假定速度均匀  $v = \bar{v}$ ，再做变换  $D = D' e^{imz}$ ，其中  $m = \omega/v$ ，这时 (10-5-4) 可以简化为

$$D'_z = \frac{iv}{2\omega} D'_{xx} \quad (10-5-5)$$

为求出 (10-5-4) 或 (10-5-5) 在地下的解，只需知道  $D$  沿着地表 (所有  $x, z = 0$ ) 的值就可以了。在反射地震勘探中， $D$  通常能近似地表为在炮点的  $\delta$  函数。

现在让我们转到上行波  $U$  的计算。从 (10-5-1) 的第一行，有

$$U_z = -iabU - \frac{Y_z}{2Y}(U - D) \quad (10-5-6)$$

如果我们有意忽略穿透系数对  $U$  的影响，而保持  $U$  和  $D$  的

反射系数的交互作用，这个式子成为

$$U_z = -iabU + \frac{Y_z}{2Y} D \quad (10-5-7)$$

由于反射系数  $c$  定义为

$$c = \frac{Y_2 - Y_1}{Y_2 + Y_1} = -c'$$

我们能够〔因为  $Y(z)$  的可微性〕把 (10-5-7) 写成

$$U_z = -iabU - c'(z)D \quad (10-5-8)$$

如对下行波所做的那样，我们能够把平方根近似从平面波推广到光束，得

$$U_z = -\frac{i\omega}{v}U - \frac{iv}{2\omega}U_{xx} - c'(x, z)D \quad (10-5-9)$$

作变元替换  $U = U''e^{-imz}$  和  $D = D'e^{imz}$ ，假定速度均匀，则非均匀导纳的假定把 (10-5-9) 化为

$$U''_z = -\frac{\bar{v}/2}{-i\omega}U''_{xx} - c'(x, z)D'e^{2imz} \quad (10-5-10)$$

算出 (10-5-10) 的解是很重要的。首先，在开始计算  $U''$  之前，必须通过某个方程先算出  $D'$ 。在解 (10-5-10) 中，我们把  $c(x, z)D'$  看作是产生  $U''$  的一个源项。现在有两个重要问题。其一是数据合成。称为“正演”问题，另一个叫做“反演”问题，即在地表 ( $z=0$ ) 给出了数据采集  $U''$ ，要求逐步向下推断出  $c(z)$  和  $U''(z)$  两者的值。这种反演问题在下一章地震资料处理中将更全面地进行研究。这里我们暂且局限于正演问题。通过 (10-5-9) 来求  $U''$  在各处的值，需要规定其边界条件，即假定  $U''$  在地壳里某个适当的深度  $z_N$ ，

比如在能探测到的反射界面以下，对所有  $x$  皆为零。于是 (10-5-10) 就一步步地从  $z_N$  到  $z_{N-1}$ 、 $z_{N-2}$ 、等等，往上求，直至我们到达第一个碰到的反射界面之前，即在  $c(x, z)$  和  $D'$  都是最深的非零的地方之前， $U''$  一直是零。在这一点上，(10-5-10) 的源项才起作用了，且  $U''$  从此往上一一直都成为非零的了。计算结果见图10-24所示。

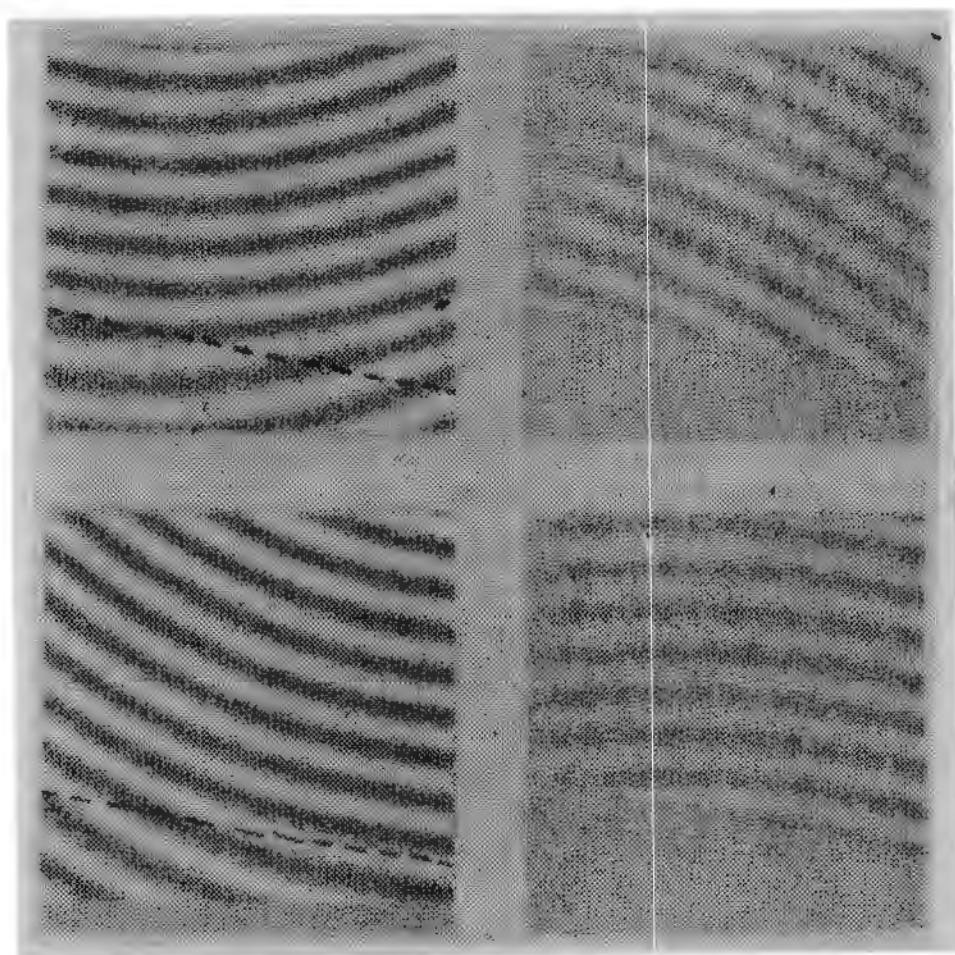


图 10-24

下行波和上行波的两个例子。左边两帧表示从两个不同的源点发出的下行球面波。这些波撞上了一个倾斜界面。在界面处，有阻抗差异和速度上的差异。界面下方可见较长波长的波。右边的两帧显示了上行波。它们在界面下边没有。沿着界面，上行波的相位等于下行波的相位。

这种计算也可以在时间域里做。我们有下行波的变换

$$x' = x \quad (10-5-11a)$$

$$z' = z \quad (10-5-11b)$$

$$t' = t - \frac{z}{v} \quad (10-5-11c)$$

和上行波的变换

$$x'' = x \quad (10-5-12a)$$

$$z'' = z \quad (10-5-12b)$$

$$t'' = t + \frac{z}{v} \quad (10-5-12c)$$

并且我们可以用坐标系 (10-5-11) 或坐标系 (10-5-12) 来表达  $U$  和  $D$

$$U(x, z, t) = U'(x', z', t') = U''(x'', z'', t'') \quad (10-5-13a)$$

$$D(x, z, t) = D'(x', z', t') = D''(x'', z'', t'') \quad (10-5-13b)$$

按复合函数求微商法则得

$$\partial_x D = \partial_{x'} D' \quad (10-5-14a)$$

$$\partial_z D = \left( \partial_{z'} - \frac{1}{v} \partial_{t'} \right) D' \quad (10-5-14b)$$

$$\partial_t D = \partial_{t'} D' = \partial_{t''} D'' \quad (10-5-14c)$$

及

$$\partial_x U = \partial_{x'} U' \quad (10-5-15a)$$

$$\partial_z U = \left( \partial_{z'} + \frac{1}{v} \partial_{t'} \right) U' \quad (10-5-15b)$$

$$\partial_t U = \partial_{t'} U' \quad (10-5-15c)$$

假定介质的速度均匀  $v = \bar{v}$ , 用  $-i\omega$  遍乘 (10-5-4) 和 (10-5-9), 然后把  $-i\omega$  看作一次对  $t$  求微商得出的, 得

$$D_{zt} = -\frac{1}{v} D_{tt} + \frac{\bar{v}}{2} D_{xx} \quad (10-5-16a)$$

$$\bar{U}_{zt} = \frac{1}{v} U_{tt} - \frac{\bar{v}}{2} U_{xx} - c'(x, z) D_t \quad (10-5-16b)$$

方程 (10-5-16a) 和 (10-5-16b) 运用 (10-5-14) 和 (10-5-15) 很容易地可变为

$$D'_{z't'} = \frac{\bar{v}}{2} D'_{x'x'} \quad (10-5-17a)$$

$$U''_{z''t''} = -\frac{\bar{v}}{2} U''_{x''x''} - c'(x'', z'') D''_{t''} \quad (10-5-17b)$$

现在, 可用 (10-5-17a) 计算  $D'$ , 但 (10-5-17b) 要先求出  $D''$ 。(10-5-11c) 减 (10-5-12c), 得

$$t' = t'' - \frac{2z}{v}$$

所以, 从 (10-5-13b), 我们发现 (10-5-17b) 中的  $D''$  可通过  $D'$  来表示

$$U''_{z''t''} = -\frac{\bar{v}}{2} U''_{x''x''} - c'(x'', z'') \partial_{t''} D' \left( x'', z'', t'' - \frac{2z''}{v} \right) \quad (10-5-18)$$

这个时间域结果即 (10-5-10) 的变换式。

### 练习

1. 证明:  $\frac{1}{v} [(d/dz) \ln I]$  是从界面上边往下看, 看到



的反射系数  $c'$ 。

2. 从 (9-3-20) 回想到,  $Y$  的定义含有  $k_x$ 。这在 (10-5-10) 求微商时被忽略了。试改进一下 (10-5-10), 把蕴含  $\partial D'/\partial x$  的项也包含进来。这种改进使反射系数可以是角度的函数。

## 10-6 数值的粘滞性

正数值粘滞性的意思是: 差分方程与微分方程在短波长上会有差异, 即这些短波长的波在计算进行过程中会逐渐削弱。数值粘滞性也可以是负的, 使得短波长增强, 而不是衰减了。尽管研究数值的粘滞性不见得有足够的科学根据, 但科学工作者们由于多方面的原因还是进行了这方面的研究。原因之一, 即使微分方程未破坏因果律, 但可能由于差分方程中的负粘滞性而带来不稳定性。其二, 从节约计算考虑 [尤其是在  $P_{zt} = (v/2)P_{xx}$  这样的多维问题中] 可能要求对波形采样尽量少到实际上许可的程度。其三, 当把观察的数据拿去处理时, 即当  $P(x, t)$  要从  $z_1$  至  $z_2$  做外推的时候, 可能数据又与外推方程所根据的某种假定相矛盾了。

例如, 假定  $P(x, t)$  有付里叶变换  $P'(k_x, \omega)$ 。于是, 由于  $k_x^2 + k_z^2 = \omega^2/v^2$ , 自由传播的波有  $|k_x| < \omega/v$  特征, 所以对于不满足  $|k_x| < \omega/v$  的  $k_x$ ,  $P'(k_x, \omega)$  应该为零。在  $P_{zt} = v/2P_{xx}$  求微商中曾进一步假定波以一小的角度传播; 因而, 不等性就更为突出,  $|k_x| \ll \omega/v$ 。因为观察到的数据实际上不会满足这些条件, 这就要求我们有两种选择。第一, 当数据没有许多能量, 且当差分方程有可能放大它时, 我们就可以略去  $(k_x, \omega)$  空间的不合法部分。第二, 我们能够修改差分或微分方程以便于在变换空间的不合法部分具有

控制了的正的数值粘滞性。这种运算有时称为扇形滤波法。因为在  $(\omega, k_x)$  空间的衰减区域为楔形。

算子  $\partial_{xx}$  有付里叶变换  $-k_x^2$ 。算子  $\delta_{xx}$  相当于在  $x$  轴上系数为  $(1, -2, 1)/\Delta x^2$  的一个褶积；于是，它的付里叶变换为  $[\exp(-ik_x\Delta x) - 2 + \exp(ik_x\Delta x)]/\Delta x^2$ 。我们把它们记为 (FT 表示“付里叶变换”)

$$FT(\partial_{xx}) = -k_x^2 \quad (10-6-1a)$$

$$FT\left(\frac{\delta_{xx}}{\Delta x^2}\right) = -\hat{k}_x^2 \\ = -\frac{2(1 - \cos k_x \Delta x)}{\Delta x^2}$$

$$FT\left(\frac{\delta_{xx}}{\Delta x^2}\right) = -\frac{2^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \quad (10-6-1b)$$

$k_x$  的近似  $\hat{k}_x$  为

$$\hat{k}_x = \frac{2}{\Delta x} \sin k_x \frac{\Delta x}{2} \quad (10-6-2)$$

近似  $\hat{k}_x \approx k_x$  的误差见图10-25的列表。

每波长内的 点数 $2\pi/\omega\Delta t$	$\omega\Delta t$ 或 $K_x\Delta x$ , 弧度	$2\tan\omega\Delta t/2$ 的相对误差	$2\sin K_x\Delta x/2$ 的相对误差	(10-6-8) 的相对误差
$\pi \times 10^4$	$2 \times 10^{-4}$	$10^{-2}/3$	$10^{-2}/6$	$0(10^{-4})$
20.000000	0.314159	0.008272	-0.004116	-0.000021
16.000000	0.392699	0.012968	-0.006434	-0.000051
12.000000	0.523599	0.023218	-0.011449	-0.000159
10.000000	0.628318	0.033675	-0.016504	-0.000330
8.000000	0.785398	0.053325	-0.025834	-0.000812
6.000000	1.047197	0.097645	-0.046109	-0.002613
4.000000	1.570796	0.240396	-0.104913	-0.013849
3.000000	2.094395	0.492833	-0.189390	-0.046111
2.100000	2.991992	1.596763	-0.400123	-0.203548

图 10-25

用差分形式表达微分方程时，常伴随着短波长上的相对误差

克瑞安克-尼可逊方法相当于另一种近似, 这里, 算子  $\partial/\partial t$  的付里叶变换为  $-i\omega$ , 用双线性变换来近似。对  $\omega$  的近似  $\hat{\omega}$  则为

$$-i\hat{\omega} \Delta t = \frac{2(1 - e^{i\omega\Delta t})}{1 + e^{i\omega\Delta t}}$$

右边分式上下乘以  $e^{-i\omega\Delta t/2}$ , 得

$$\begin{aligned} -i\hat{\omega} \Delta t &= 2 \frac{e^{-i\omega\Delta t/2} - e^{i\omega\Delta t/2}}{e^{-i\omega\Delta t/2} + e^{i\omega\Delta t/2}} \\ &= -2i \tan \frac{\omega\Delta t}{2} \end{aligned} \quad (10-6-3)$$

$$\hat{\omega} = -\frac{2}{\Delta t} \tan \frac{\omega\Delta t}{2}$$

这个近似也列在图10-25的表中。

再看看高阶差分的逼近是怎样建立起来的。解(10-6-2), 求  $ik_x$ , 得

$$ik_x = \frac{2}{\Delta x} \operatorname{arc} \sin h \left( \frac{i\hat{k}_x \Delta x}{2} \right) \quad (10-6-4)$$

想到  $\operatorname{arc} \sin h$  的幂级数

$$\operatorname{arc} \sin h u = u - \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{u^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{u^7}{7} + \dots$$

(10-6-5)

(10-6-4) 的逆付里叶变换利用 (10-6-5) 可对  $\partial_x$  按  $\delta_x$  的幂作幂级数展开。

目前, 反射地震数据常常接近于在水平的  $x$  坐标里采样。所以, 设计一个比  $\delta_{xx}$  更精确的对  $\partial_{xx}$  的逼近, 是值得的。(10-6-4) 平方, 在  $\text{arc sin } h$  展开式中只保留前两项, 得

$$-k_x^2 \approx -\frac{4}{\Delta x^2} \left( u^2 - \frac{u^4}{3} \right) \quad (10-6-6)$$

其中  $u = i\hat{k}_x \Delta x/2$ 。取其逆变换式, 我们有

$$\partial_{xx} \approx \frac{\delta_{xx}(1 - \delta_{xx}/12)}{\Delta x^2} \quad (10-6-7)$$

最为便当的是利用下列有理式

$$\partial_{xx} \approx \frac{\delta_{xx}/\Delta x^2}{1 + \delta_{xx}/12} \quad (10-6-8)$$

有个窍门, 有理式不必用高阶差分算子就能使用。注意, (10-6-8) 用于  $P_t = P_{xx}$  类型的微分方程可得出

$$\left( 1 + \frac{\delta_{xx}}{12} \right) \delta_t P = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \delta_{xx} P \quad (10-6-9)$$

新的一项  $\delta_{xxt}$  适合于旧的计算, 因而仅要调整一下系数就行了。参看图10-25, 它表明精度有了很大的提高。根据图10-25和具体应用中可以接受的误差, 比如说3%, 我们可以确定每波长内最小可接受的点数, 比如说, 在  $z$  和  $t$  轴上每波长内为10个点, 在  $x$  轴上每波长  $3\frac{1}{2}$  个点。于是, 有用的带宽  $-2\pi/10 < \omega \Delta t < +2\pi/10$  不如可用的总带宽 ( $2\pi/10$  是采样数据的变换的周期性间隔) 明显。在这个例子里, 有用带宽与总带宽之比是  $\frac{1}{5}$ 。为了更充分地应用可以使用的带宽,

就必然引起更大的误差，或必须给微分算子建立更为精密的差分近似。图10-26说明能使用的  $(\omega, k_x)$  空间不可取的部分。

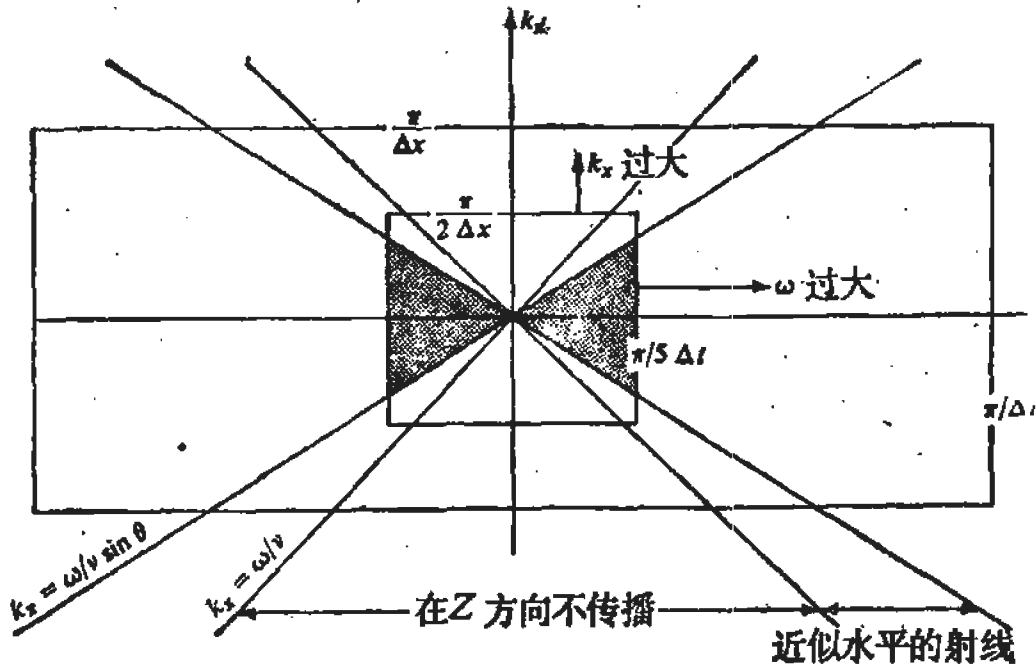


图 10-26

$(\omega, k_x)$  平面图, 可以认为场数据在  $(\omega, k_x)$  平面内各处都有些能量。只在阴影区域内我们的差分方程才恰当地模拟了波动方程。在  $|k_x| > |\omega/v|$  的能量不表示自由波, 它表示面波、或表示数据采集中的误差 (常为静误差、随机干扰、或从一道到另一道不平滑变元的增益)。这种能量在偏移校正程序上不能说明什么, 所以, 应该通过滤波给除掉。这可用扇形滤波 (如参考文献38所述), 或如这里用的办法, 用数值粘滞性来做。实际上, 为了实用的缘故, 我们经常可以把某个倾角以外的射线都压制掉。这就得出较大的扇形滤波阻区  $|k_x| > |\omega/v \sin(\text{倾角})|$ 。虽然信息能够一直传到在  $\omega$  和  $k_x$  两者里的折叠频率, 不过, 实际上使用有限长度的算子把有用的带宽给弄窄了。使用简单的时间-差分算子的结果, 形成了对约四分之一折叠频率这样一个实际带宽的限制。这在原则上没有问题, 数据在处理之前可做内插, 或者使用更精心的 (即: 较长的) 差分算子。最后, 这个图是按  $\Delta x > v \Delta t$  绘制的, 因为这代表通常实用的情形, 在这种情形下, 时间的外加点比空间的外加点能更便宜地获得。

作为控制数值粘滞性的例子, 我们取微分方程  $P_{zt} = v/2$

$P_{xx}$ , 将其修改一下, 在能用的带宽外边, 即在  $|k_x \Delta x| > \pi/5$  的地方, 使能量衰减。我们在右边只加上一项。即, 对

$$\partial_z P = \frac{v}{-2i\omega} \partial_{xx} P \quad (10-6-10)$$

恰到好处地补充一项

$$\partial_z P = \frac{v}{-2i\omega} \partial_{xx} P + a \partial_{xx} P \quad (10-6-11)$$

要看常数  $a$  取怎样的数值好, 我们对 (10-6-11) 中的  $x$  坐标作变换

$$\partial_z P = \left( \frac{v k_x^2}{2i\omega} - a k_x^2 \right) P \quad (10-6-12)$$

方程 (10-6-12) 的解为

$$P(z) = P(z_0) \exp \left[ \left( \frac{v k_x^2}{2i\omega} - a k_x^2 \right) (z - z_0) \right] \quad (10-6-13)$$

指数的虚部仅给出相位角度, 这个暂可不管, 因为我们只对幅值感兴趣。令  $z - z_0 = d$ , 那么, (10-6-13) 成为

$$\left| \frac{P(z)}{P(z_0)} \right| = \exp(-a k_x^2 d) \quad (10-6-14)$$

现在我们应该确定需要衰减多少。比如说, 我们希望  $k_x \Delta x = \pi/4$  时, (10-6-14) 蕴含  $e^{-1}$  的衰减。对 (10-6-5) 的指数,

我们有

$$-ak_x^2 d = -1$$

$$a(k_x \Delta x)^2 \frac{d}{\Delta x^2} = 1$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{d}{\Delta x^2} = 1$$

$$a = \frac{16 \Delta x^2}{d \pi^2} \quad (10-6-15)$$

因此，我们为得到 (10-6-11) 而在 (10-6-10) 补充的那一项具有的系数  $a$ ，随着方网格的面积  $\Delta x^2$  而趋于 0。补充了这一项，才给出了 (10-6-14) 的空间频率的高斯衰减函数。粘滞性项的引入对计算机程序增加不了多少工作量。

下面，我们修改一下外推方程，以便过偏的倾角  $[\sin(\text{倾角}) = kv/\omega]$  被衰减，这不是确切的数值粘滞性。因为我们需要更换基本微分方程了。这和数值粘滞性相似，因为它到底还只是个修改，为的是校正些不足之处。这里我们对微分方程 (10-6-10) 进行修改，写成

$$\partial_z P = \frac{v \partial_{xx}}{2(-i\omega + \omega_0)} P \quad (10-6-16)$$

看看  $\omega_0$  应取什么数值，我们把分母有理化

$$\partial_z P = \frac{v}{2} \frac{i\omega + \omega_0}{(\omega^2 + \omega_0^2)} \partial_{xx} P \quad (10-6-17)$$

现在我们可以不管 (10-6-17) 右边的虚部，因为它只提供  $P$  的相位。对  $x$  坐标做付里叶变换，我们有

$$\partial_z P = - \frac{v \omega_0 k_x^2}{2(\omega^2 + \omega_0^2)} P \quad (10-6-18)$$

有两种情况。我们可以拾取一个很小的  $\omega_0$ ，那么，在  $\omega < \omega_0$  情况下，(10-6-9) 简约为空间频率损耗；但在  $\omega > \omega_0$  情况下，(10-6-18) 相当于

$$\partial_z P = \frac{-v\omega_0}{2} \frac{k_x^2}{\omega^2} P \quad (10-6-19)$$

很明显，这是衰减，它是倾角的高斯函数。后者 ( $\omega > \omega_0$ ) 是我们感兴趣的情况。关于  $\omega_0$  的数值选择，留在练习里做。

### 练习

1. 若想把与  $z$  轴成  $30^\circ$  角、自  $z_1$  到  $z_2$  间传播的波衰减到原来振幅的  $e^{-1}$  倍，问 (10-6-16) 中的  $\omega_0$  应取什么值？可能会说  $\omega_0$  小了，必须把它看作是具有倒时的物理量纲的某种量做比较。请举出一个说  $\omega_0$  小的例子，再给出一个说  $\omega_0$  不小的例子。

2. 证明： $P_z = iv/2\omega(\partial_{xx} + b\partial_{xxz})P$  中的参数  $b$  可以用来产生近似形式  $\exp[-bk_z^2(z-z_0)]$  的粘滞性衰减。当  $\Delta z$  取得很大时，才有用。

3. 用方程  $P_z = -a\omega^2 P$  在  $z$  方向作一步外推。代入双线性变换  $-i\omega = 2(1-Z)/(1+Z)$ 。试说明对这个方程不适用，因为除数多项式不是最小相位。

4. 证明：方程  $P_z = a(-\omega^2 \Delta t^2/2 + i\omega \Delta t)P$ ，和习题3的方程不一样。它导致一表因的时间域滤波。（用克瑞安克-尼可逊方法，即，双线性变换方法做  $z$  的外推。）

5. 已知一组数据  $P(x, t)$ ，满足方程  $P_{zt} = P_{xx}$ 。观察到，变换过来的数据  $Q(x, t)$  ( $Q(x, t) = P(x, t)e^{at}$ ) 在一适当的数值范围内是拟合的，于是  $Q$  可以用一个算术运算式表示出来。问  $Q$  满足什么样的微分方程？



## 第11章 用波动方程进行地震数据处理

理论分析中用来描述波传播的坐标系，与地球物理勘探解释工作中平常用来描述各种观察结果的坐标系有些不同。理论工作者一般考虑在某一时刻的单个震源（或称放炮）的位置，而实验工作者则要对多个爆炸点分别产生的波进行综合处理和分析。本章的任务是把波动方程转换到勘探工作者熟悉的某些坐标系中。

### 11-1 道集和剖面的向下延拓

海洋勘探通常是这样进行的：船上带着能反复发射的能量，船后拖一根有二、三公里长的电缆，装有声波接收器。理想的是，船的行程是一条直线，我们可以把这作为  $x$  轴，并且，所有我们要研究的地震波是在通过船航行线的一个铅直平面上传播。这个平面称为地震剖面的平面。我们只叙述二维的理论，一方面是由于：一旦掌握了二维的差分问题，则描述三维空间的波就不是个大问题了；另一方面，二维问题和当前的勘探实践的规模相适应，也和当今的计算机的能力相适应。从一个点震源发出的、在三维空间中传播的脉冲波，其振幅的衰减与旅行时成反比（球面波前的面积按  $t^2$  扩大，所以，每一单位面积的能量按  $t^2$  下降，于是，波振幅与  $t^{-1}$  成正比）。从一条线震源发出的脉冲波（这条线应该是在海面上、与船航行线垂直）其振幅衰减与  $t^{-1/2}$  成正比。因此，欲把三维的现实压缩在一维或二维的数学形式中，自始至终都

要考虑到一个标量因子  $t^{1/2}$  或  $t$  实际上比这个标量因子更为重要的，是力图使得从船航行线上发射出来而又回到这条航线上去的所有的地震波射线，都局限在同一个铅直平面上，换句话说，我们希望避免记录到侧面反射。通常，仔细地选择船的航线能减少或消除侧面反射。但是，一旦数据记录下来了，如果含有侧面反射，那就难以消除了。侧面反射是怎样形成的呢？可把船的一条航线想象成柱坐标系统的轴，而把波的旅行时想象为柱坐标系统中的半径的一种度量。如果地震剖面的平面与铅垂面仅稍微有点偏离，解释是容易的。但当地壳结构变得复杂起来，以致于有好几个位置不同的平面（界面）都产生向柱坐标系的轴的反射，那么，观察到的数据便是它们几个反射的叠加，这样，解释就困难了，简言之，在地壳具有三维不均匀性的地方，用二维实验方法和计算技术，是得不到满意的结果的。

图11-1说明两个坐标系统之间的十分重要的关系。炮点（声震源） $s$ 的坐标和检波点（声接收器）的坐标 $g$ ，是沿着船的航线——即 $x$ 轴——而定的。沿着这 $x$ 轴，还有炮检距偏移坐标 $f$ 及炮点和检波点的中点 $y$ 。

我们现在来描述压力波 $P(s, g)$ ，其中炮点坐标和检波点坐标取为独立的变元。施工时，炮点和检波点并不是沿 $x$ 轴连续取值的，不过，相邻点经常挨得很近，仅需进行一下内插便可对任一 $s$ 或 $g$ 计算 $P$ 。倘若数据不能内插，那它们在微分方程中使用起来就不令人满意了。

另一个独立的变元是时间 $t$ 。时间轴上的原点要这样选取，以便在放炮时，时间 $t$ 等于0。待炮点 $s$ 上的回声完全都没有了之后（通常大约6秒钟之后），时间轴又重置于0，以便在 $s + \Delta s$ 放下一炮。在图11-1中， $t$ 轴可以置在图纸平

面的外边。 $(s, g)$  坐标和  $(y, f)$  两坐标系都是正交的。象  $(s, f)$  这样的非正交坐标有时在海上数据记录中使用，而在数据分析中很少用到，所以我们不必管它。

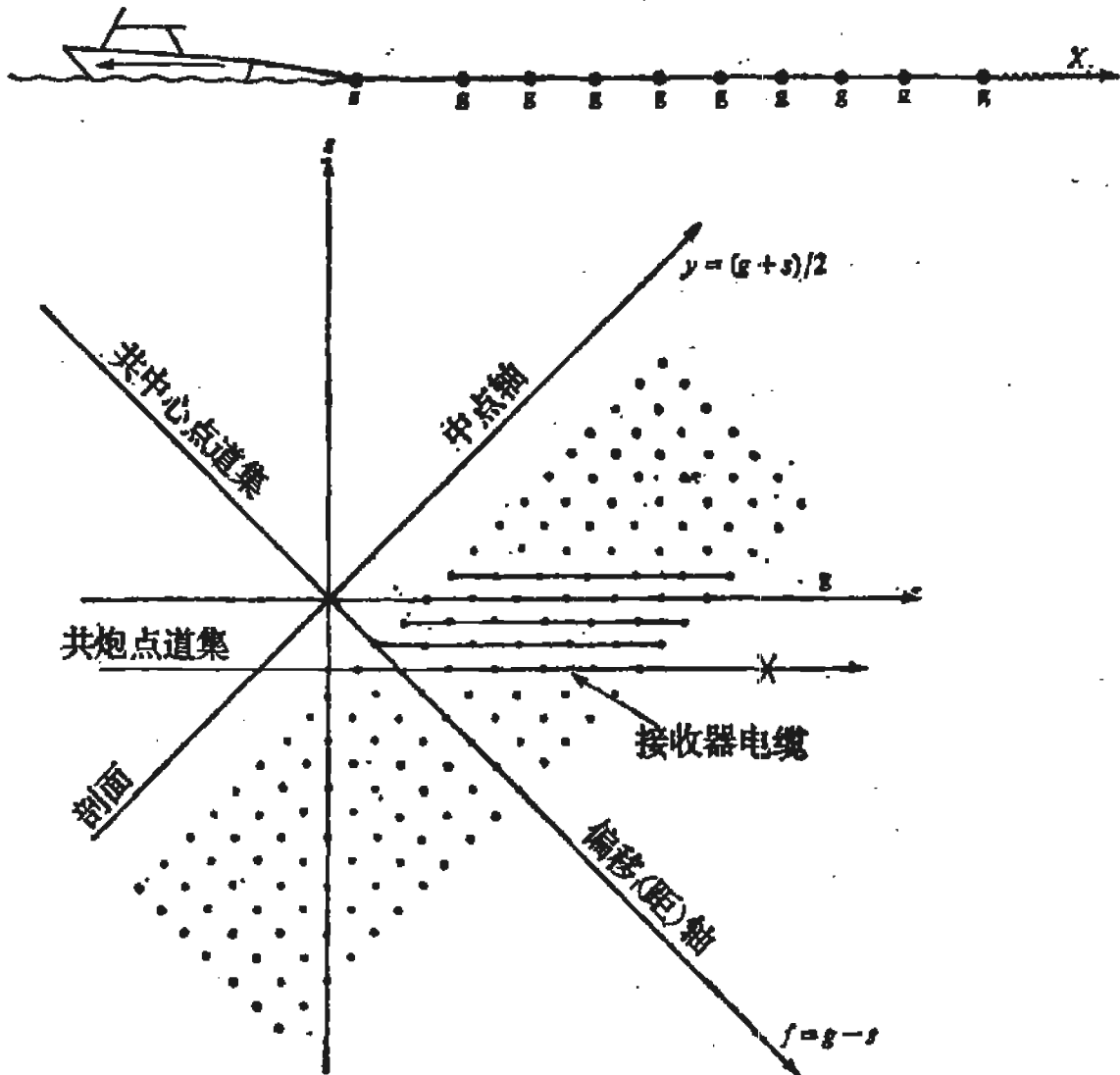


图 11-1

声震源坐标  $s$ ，检波点（声接收器）坐标  $g$ ，偏移（距）坐标  $f = g - s$ ，和中心点坐标  $y = (g + s)/2$  之间的关系。理论工作者通常使用  $s$  和  $g$  作为波压力场的坐标，而解释人员通常则使用  $f$  和  $y$ 。

理论分析中都是对一固定的  $s$  在  $(g, t)$  平面上进行研究。勘探地震学中， $(g, t)$  平面上的数据称为“共炮点道集”。地震数据解释人员平常研究在  $(y, t)$  和  $(f, t)$  这两个平面上的波振幅。 $(y, t)$  平面的显示称为“地震剖面”。 $(f, t)$  平面

的显示叫做“共中心点道集”，或称“共反射点道集”。在工业上则常叫做“共深度点道集”。这个名词的起源是通常把地球模拟为层理介质，反射点称为“深度点”，处于中心点的正下方。这使得我们经常把“深度点”和深度轴  $z$  搅在一起，造成混淆。在本书内，我们避免用“深度点”这个名词。对于固定的偏移（距） $f$ ，按不同中心点  $y$  的数据显示，即  $(y, t)$  平面，称为“地震剖面”，这是正交平面中唯一的、可以延续（显示）上百上千公里的那个平面。而“共炮点道集”和“共中心点道集”只延续几公里，首先是因为接收器电缆长度有限，而更基本地讲，是因为一个炮点能被听（接收）到的距离有限。

现今一般的“共炮点道集”和“共中心点道集”包括大约48个地震道。由于有用的数据经常是在3公里长的接收器电缆之外采集的，所以有时也采用另一种数据接收器，这就是“声纳浮标”。声纳浮标是一个带有单一声接收器（称为“水上电话”）和一个无线电发送器的浮标。把这浮标从船上投到海面上，船往前行驶，以大约每六秒钟重复一次的速率放炮，直到这浮标超出了无线电的或地震的信号所能接收的范围为止。这种数据组成一共接收点的道集，并可包括大约200到2000个地震道。声纳浮标数据在概念上就是最早的给波外推方程提供边界条件的数据类型之一。互易性原理说明：我们可想象是船上带有声接收器，浮标上装着反复激发的声震源（虽然并不是这样干的，因为声接收器是个不贵的、重量轻的、舍得扔掉的很合适地装在浮标上的装置）。因此，表示  $P(g, s, t) = P(s, g, t)$  的互易性原理可使我们设想为，每放一炮，有好几百个接收器接收，这正是我们对上行波和下行波的波场作向下延拓所需要的。

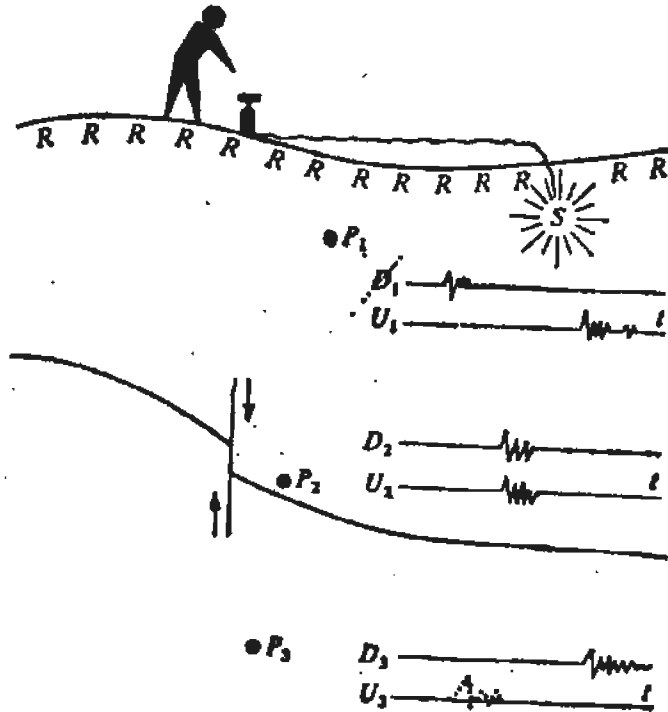


图 11-2

反射界面定位基本原理的图示。一个浅离地面的震源  $S$  和许多地表接收器  $R$ 。于一较浅的深度。在反射界面上面、在一有代表性的点  $P_1$  处，下行波  $D_1$  比上行波  $U_1$  早得多就有了。上行波  $U_1$  代表那些从震源旅行到反射界面上的一处或多处、再向上返回到  $P_1$  点的能量。在  $P_2$  点，它在于或近于任意形状的反射界面上，将会有下行波和上行波 ( $D_2$  和  $U_2$ ) 在时间上的重合。时间重合可以用来推定反射界面的位置。在反射界面下面，在  $P_3$  点，原则上说，已没有朝上来的波了。然而，在大多数情况下，估计在不同深度的上行波  $U$  的实际做法，总是把在  $R$  处见到的朝上来的波，推移到更早的时间（相应于越来越加大的深度）上去。由于这样做时，我们对界面并无什么了解，故可能误断在  $P_3$  有一个朝上来的波  $U$ ，（用虚点描出），在下行波到达之前出现。这种误断，对于利用上行波和下行波的时间重合来定反射界面的位置，不会起坏作用。这种做法，对于在不同深度有许多反射界面的情况是有效的（取自参考文献 5，第 468 页）。

这就引起了我们一个想法，即：利用向下延拓的波去了解地球内部的情况。如图 11-2 所示，一个明显而重要的概念是：

“存在于地壳里的反射界面，是处在下行波的到达时间与上行波的到达时间相重合的地方。”

为了更好地阐明这个概念，将用到单色波。这能使我们在  $(x, z)$  里对一确定的  $\omega$  进行计算和思考，而不必在  $(x, z, t)$  三维空间里讨论。但用单频率波，会遇到一个困难，就是两个时倚波形的时间重合的问题，对单色波来说，变成了这两个波以一固定的相移（通常为 0 度或 180 度）在空间能产生反射的点

上相干。我们将看到，于空间的单个点上，单一频率上的相位

相等，并不提供时间的重合性。但多种频率的相位相干却能提供时间重合性。一般说来，相位相干中包含的频率越多，空间的分辨率就越高。

读者还记得，10-5节中有许多假定，并引出了这么一个概念，即上行的和下行的单色波能够用下列方程计算

$$D'_z = \frac{iv}{2\omega} D'_{xx} \quad (11-1-1)$$

$$U'_z = -\frac{iv}{2\omega} U'_{xx} - c(x, z) D' e^{2imz} \quad (11-1-2)$$

在“正演”问题中，从模型算出合成资料。在“反演”问题中，从资料计算模型。做正演问题，我们先假定一个放炮位置，譬如说，在  $z = 0$  和  $x = 0$ 。这给下行波提供了  $\delta$  函数的初始条件。再假定一个速度模型之后，便允许使用一个方程，譬如说，象 (11-1-1) 那样的方程将下行波向下延拓到任意深度。当深度足够大时，上行波  $U$  就取作 0。用 (11-1-2) 把它积分上来，其中，反射系数  $c$  和下行波  $D$  的乘积的作用，相当于上行波的震源。

现在我们来研究“反演”问题。在这里，我们试图确定反射系数  $c(x, z)$ ，但是，我们观测到的是在地球表面 ( $z = 0$ ，所有  $x$ ) 处的上行波  $U$ 。我们和以前一样计算  $D$ ，由于  $c(x, z)$  在 (11-1-2) 中是未知量，我们能通过自地面 ( $z = 0$ ， $\hat{U}$  为已知) 把方程

$$\hat{U}'_z = -\frac{iv}{2\omega} \hat{U}'_{xx} - 0 \quad (11-1-3)$$

向下推进的办法，计算  $\hat{U}$ ——作为  $U$  的近似。现在的问题是： $\hat{U}$  会怎样偏离  $U$  呢？在地球表面和最浅的反射界面（最

浅的不等于零的  $c$ ) 之间, (11-1-2) 和 (11-1-3) 之间就没有不同了。在这个区域里,  $U$  和  $\hat{U}$  是具有相同速度、方向、散发速率以及其它性质的波。因为 (11-1-2) 是向下投射 (和传播的方向相反), (11-1-2) 中震源项的作用是“断掉”上行的波, 直到  $U$  (不象  $\hat{U}$ ) 在最深的反射界面底下全部消

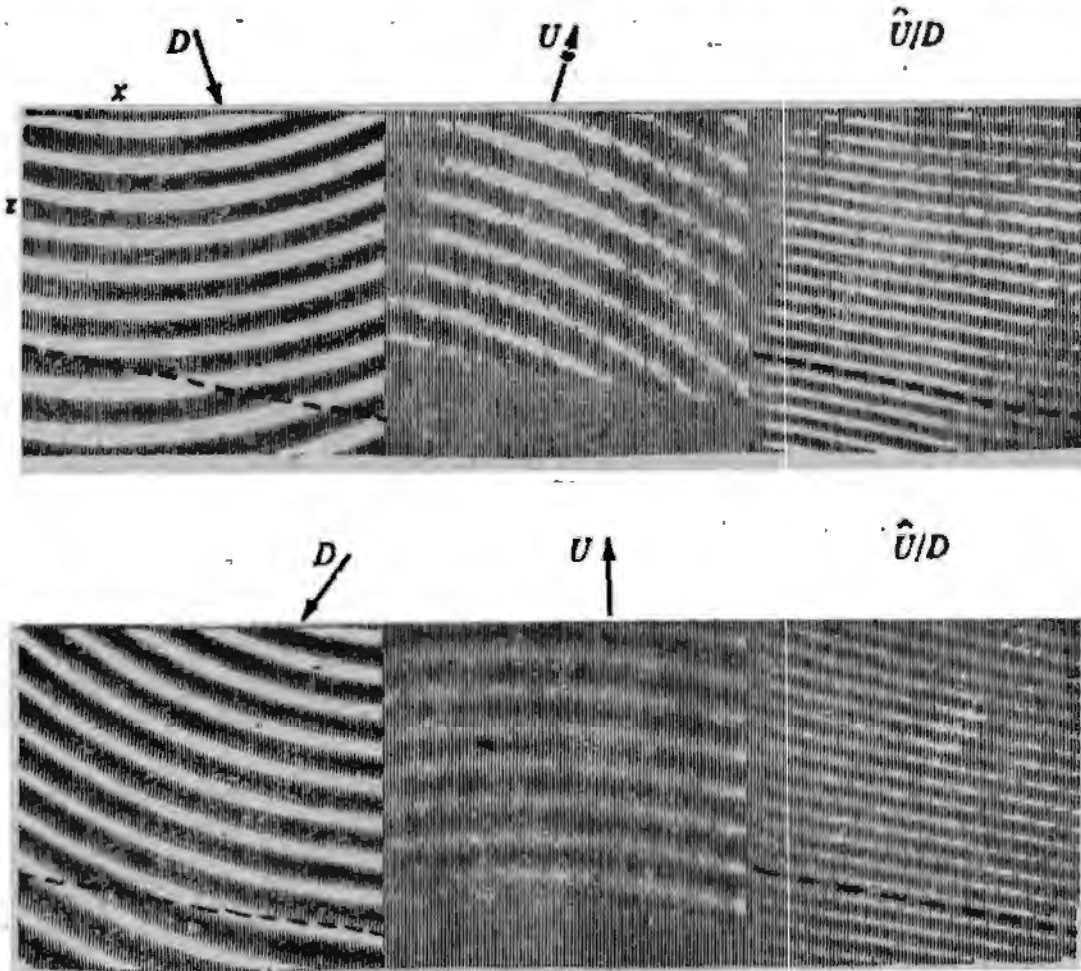


图 11-3

用单个震源发射单频率波所显示的倾斜层的位置。上下两行分别表示两个不同的震源位置。左图表明下行波  $D$  的实部。虚线代表从低速到高速的转变, 这能从虚线下面波长变大看出来。中图代表上行的反射波  $U$ , 它是从速度突变处发出来的。右图上画的是比率  $\hat{U}/D$  的实部。右图告诉我们, 在那些地方下行波和上行波同相位, 这给出了该倾斜层的正确倾角。但仅用单一频率, 对于倾斜层的深度, 除了能说它是半波长的若干倍之外, 准确的深度是定不下来的。所估计的上行波  $\hat{U}$  是从在地面实测到的上行波  $U$  和介质的速度计算出来的, 未用到  $Y_2/Y_1$  (取自参考文献 3, 第 417 页)。

失为止。现在的问题是， $\hat{U}$  在反射界面下面并不消失，这是否有实际意义呢？我们计算  $\hat{U}$  的目的，是根据图11-2中表明的时间重合性的概念，确定反射界面的位置。对于时间重合性概念，上行波在一界面下边未被断掉并没多大关系。图11-3 就单色波说明了这些概念。为了显示地壳模型，反射系数  $c(x, z)$  是用显示  $\hat{c}$  来估计的，其中

$$\hat{c}(x, z) = \frac{\hat{U}(x, z)}{D(x, z)} \quad (11-1-4)$$

我们注意到，对于单色波， $\hat{U}$  和  $D$  的相位重合性，不仅发生在反射界面上，而且在反射界面上下所有间隔半波长的地方都有（如果我们用  $U$  替代  $\hat{U}$ ，界面下则为 0）。现在考虑；我们对其它频率的单色波都重复这些计算，并将其结果叠加起来，那么，在反射界面上是同相叠加；但偏离反射界面的地方，则是不同相位的叠加。

图11-4表示的是和图11-3相似的计算，只是在方程中包括了更多的项（为了把偏离垂直方向较大角度旅行的波更好地表示出来），也用了更多频率（为了描绘反射界面处构成的干涉）。图11-3与图11-4另一不同之处是，(11-1-3)的反射界面估计为  $\hat{U}/D$ ，而(11-1-4)中的是  $\hat{U}D^*$ （其中  $D^*$  是  $D$  的复共轭）。 $\hat{U}/D$  和  $\hat{U}D^*$  有共同的相位，但振幅不同。 $\hat{U}/D$  的优点是，它的幅值与反射系数相等。 $\hat{U}/D$  的缺点是： $D$  的结点，在理论上也应该是  $U$  的结点，可能使我们碰到用小数的数相除的实际问题。 $\hat{U}D^*$  的另一个优点，即：如果它不只是对多个频率叠加，而且还在许多放炮位置上叠加起来，它就会具有一个我们希望有的特征，即：光照度弱时小，光照度强时就大。



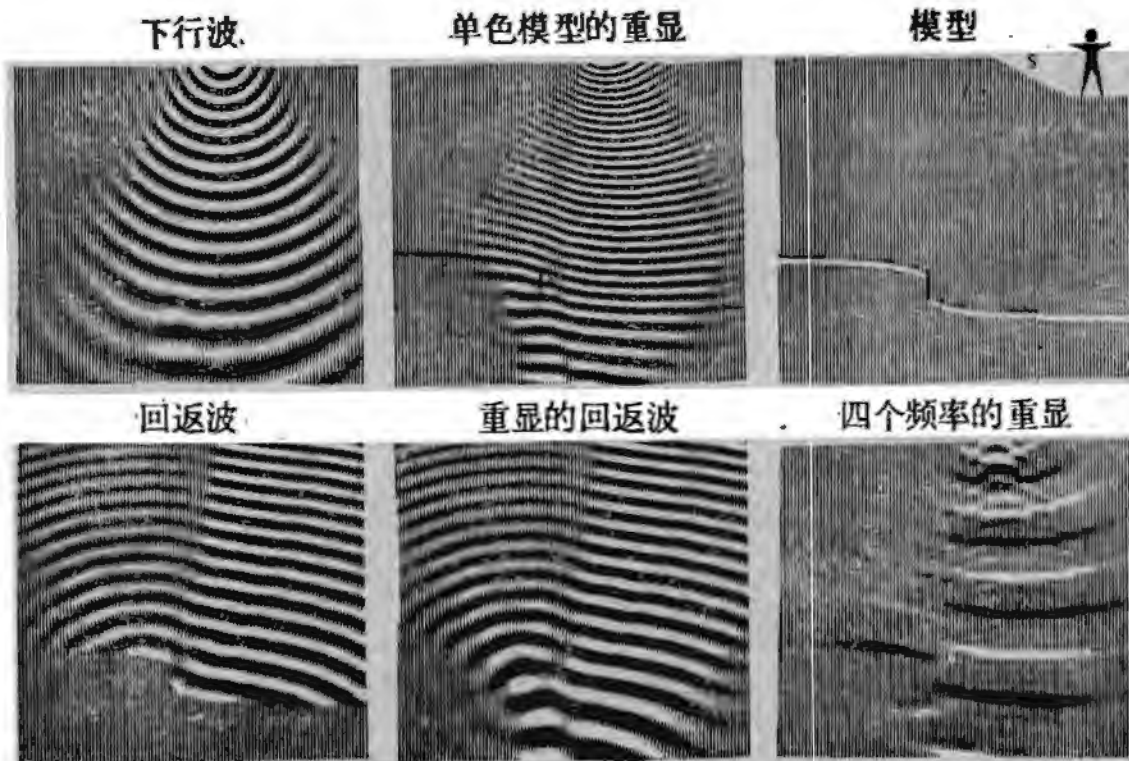


图 11-4

具有断裂的反射界面上反射波的合成，和该断层物象的重显。上排左图，波从一个点震源发射出来。下排左图，上行反射波。该波在界面下面消失。下排中图，我们看到在地表观察到的上行波的重显。做这种重显时，未假定对反射界面有所了解，因为正好是要探求这些界面。因此，在重显回返波图中，反射界面底下也有上行波。上排中图表明上行波和下行波的复共轭的乘积。反射界面在顺着零相位勾出的某条线上，但是仅用单一频率，还不能说出哪条线代表反射界面。上排中图经用四个频率求和，得出下排右图。这图较好地指出了反射界面的位置，用更多的频率则可更清楚地确定反射界面的位置（取自参考文献5，第479页）。

下面，我们讨论一个重要的实际问题：如何把剖面向下延拓。明显的途径是对每一炮点在  $(g, t)$  平面上求一次解。还有另一种办法，我们或许能利用互易性原理，并用到每一个接收点，作为  $(s, t)$  平面上的一个延拓问题来求解。我们将会认识到，从几方面来看，抛开理论分析用的  $(g, s)$  坐标而依解释人员的  $(y, f)$  坐标直接向下延拓，会带来很多好处。实际上，许多资料是从单一炮点、单一接收器采集起

来的（译注：原文如此），两者一块儿在地表上移动。对于一个固定的炮点，只有一个接收点，则资料不足以在  $(g, t)$  平面上对向下的延拓置初始状态。可是，把所有的炮点都考虑在内时，会使我们以很高的精确度将恒定偏移距剖面向下延拓。

我们要导出两个独立的方程，一个是下行波的，一个是上行波的。从场坐标  $(s, g, e, t)$  到解释坐标  $(y, f, z, t')$  的转换按下列式子建立起来

$$y = \frac{s + g}{2} \quad (11-1-5a)$$

$$f = g - s \quad (11-1-5b)$$

$$z = e \quad (11-1-5c)$$

$$t' = t - \left( \pm \frac{e}{v} \right) \quad (11-1-5d)$$

前两条，(11-1-5a) 和 (11-1-5b) 只不过是从炮点  $s$  坐标和检波器  $g$  坐标到中心点  $y$  坐标和偏移距  $f$  坐标的变换，以前已描述过。方程 (11-1-5c) 指的是，接收器高程  $e$  是在铅直  $z$  轴上的一个点。(11-1-5d) 中，我们有了接收器高程对时间  $t'$  的依赖关系。与10-4节比较，很明显，正号用于那些顺着  $+z$  方向（向下）传播的波，而负号，式子为  $t + z/\bar{v}$ ，用于上行波。区别坐标变换式 (11-1-5) 中的常数速度  $\bar{v}$  和将用在波动方程里的空间变化速度  $\bar{v}(x, z)$  是重要的。虽然坐标变换是基于常速介质，可是变换后的波动方程仍然能够描述在变速介质中的波。

可以看出，在新的坐标系里描述的扰动，和在旧坐标

系统中的扰动是同一个。

$$P(g, s, t, e) = Q(y, f, t', z) \quad (11-1-6)$$

下面，计算  $P$  的相应于各独立变元的偏微商。

$$P_g = Q_y y_g + Q_t f_g + Q_{t'} t'_g + Q_z z_g \quad (11-1-7a)$$

$$P_g = (0.5\partial_y + \partial_t)Q$$

$$P_e = Q_y y_e + Q_t f_e + Q_{t'} t'_e + Q_z z_e \quad (11-1-7b)$$

$$P_e = (t'_e \partial_{t'} + \partial_z)Q$$

$$P_t = (t'_t \partial_{t'})Q \quad (11-1-7c)$$

我们还需要  $P$  的二阶偏微商。因为 (11-1-7) 中的所有  $\partial_y$ 、 $\partial_t$ 、 $\partial_{t'}$  和  $\partial_z$  的系数都是常数，所以二阶微商可以把 (11-1-7) 中括弧内的各算子平方起来求得。

我们对下列形式的波动方程是熟悉的

$$P_{xx} + P_{zz} = \tilde{v}^{-2} P_{tt} + \text{源} \quad (11-1-8)$$

能够想到，用来观察  $P$  的检波器可放在  $(x, z)$  空间的任意位置上。象  $P_{xx}$  这个量在地面上是可以通过在  $g = x$  点放检波器并测量  $P_{gg}$  来测定的。我们把检波器位置的坐标  $(x, z) = (g, e)$  看做是独立变元。因此，我们可以把波动方程写为

$$P_{gg} + P_{ee} = \tilde{v}^{-2} P_{tt} + \delta(g - s, e, t) \quad (11-1-9)$$

其中，我们使用了一个用在点  $(x, z, t) = (s, 0, 0)$  上的  $\delta$  函数表示的震源项。既然我们不打算在震源的邻近使用这个方程，我们就能在震源处把  $\delta$  函数扔下。现在我们取 (11-1-7) 中的算子，把它们平方起来，代入 (11-1-9)。得

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} Q_{yy} + Q_{ff} + Q_{yf} + (t'_e)^2 Q_{t't'} + 2t'_e Q_{t'z} + Q_{zz} \\ = \frac{(t'_t)^2 Q_{t't'}}{\tilde{v}^2} \end{aligned} \quad (11-1-10)$$

首先，我们在类菲涅尔近似中可略去  $Q_{zz}$ （如果估计  $Q_{zz}$  可以象 10-3 节中那样得到较高的精确度）。回到均匀介质的特殊情况， $v = \bar{v}$ ，使用  $t'_z = -(\pm 1/\bar{v})$  和  $t'_t = 1$ ，此方程便简化为

$$\pm \frac{2}{\bar{v}} Q_{t'z} = \frac{1}{4} Q_{yy} + Q_{tt} + Q_{yt} \quad (11-1-11)$$

方程 (11-1-11) 是四维的偏微分方程，它是从三维资料的初始条件出发推演而来的。这种规模的问题在计算上常常行不通，所以，现在我们考虑如何把偏移距维度去掉。我们对 (11-1-11) 就偏移距 ( $f$ ) 作积分，得

$$0 = \left( \frac{\mp 2}{\bar{v}} \partial_{zt'} + \frac{1}{4} \partial_{yy} \right) \int Q df + \partial_y \int \frac{\partial Q}{\partial f} df + \int \frac{\partial^2 Q}{\partial f^2} df \quad (11-1-12)$$

现在，如果  $Q$  和  $Q_t$  在大偏移距处应该为零的话，我们作积分又正好是在大偏移处取的极限，那么，最右边两项马上消失。我们以

$$S = \int Q df \quad (11-1-13)$$

来定义一“垂直叠加的剖面”。这种叠加是不用时移来做的，因此，它和大家熟悉的共反射点叠加类似，但不完全是同一回事。因此，对垂直叠加剖面，我们有

$$S_{zt'} = \pm \frac{\bar{v}}{8} S_{yy} \quad (11-1-14)$$

我们已可以从 (11-1-11) 得到 (11-1-14)，只要认定对于零偏移距资料，可以略去对偏移距求导的项，但是 (11-1-14)

只能应用于近道剖面。

当然，(11-1-14) 对我们并不陌生，我们早已学过方程  $P_{zt} = 0.5vP_{xx}$  控制波场的传播（有如共炮点道集）。这意味着 (11-1-14) 把双曲线转变成另一双曲线；不过，事实上，由于类菲涅尔近似（这是可加以改进的），它把抛物线改变成另一抛物线了。换句话讲，(11-1-14) 所做的正是那种在地震偏移中要做的工作。进一步的说明见下一节。

## 11-2 波动方程偏移

从地震剖面建立地壳内的反射层剖面图，称为“偏移”。在许多地区，地下是由一层一层水平的沉积岩构成的。在这些地区，地震资料的偏移极为简单，因为波垂直地向反射界面传播，并经历了一个来回的（与深度成正比的）旅行时间。这时，偏移仅仅是把该比例因子应用到时间轴上。因此，如图11-5中的波形图，它实际表明在  $z = 0$  时的  $P(x, t)$ ，就能看做是切割地球的一个截面，即  $P(x, z/2v)$ 。想象中，明暗之间廓出的界线勾画出了不同类型的沉积岩之间的边界。实际不然，交替出现的（在黑岩和白岩之间的？）层次经常是假象。这是由于震源、接受设备、甚或是地球的滤波效应所形成的，而且是不可避免的。地震剖面中所带来的最显见的、也许是最重要的信息就在于看出地壳与层理模型并不相符。通常地震剖面是做了一些垂直放大而显示出来的。这种垂直放大用的比例因子通常在 1 到 20 的范围内。图11-5中右边的那一帧作了因子 5 的垂直放大，于是，那明显的强反射界面，看上去好象有  $45^\circ$  倾斜，而实际上，在地下仅有近似  $9^\circ$  的倾斜。根据这种图片，我们可推断地下目前的情况，甚或其某些历史情况。

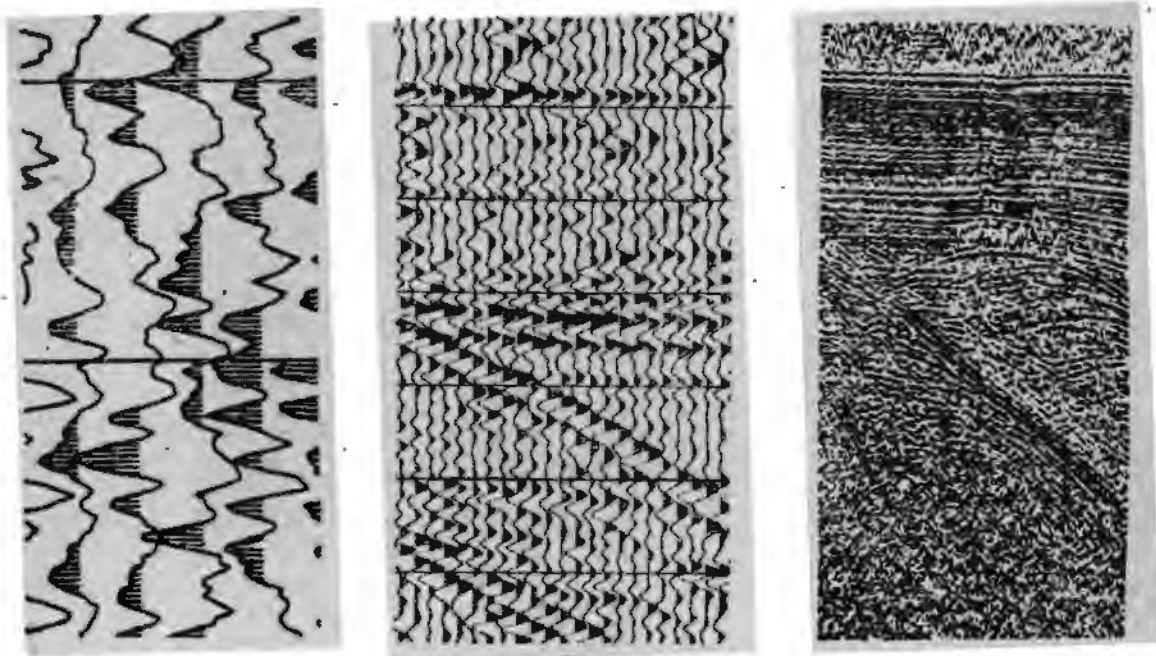


图 11-5

波场显示图。三幅打了阴影的地震记录，其疏密程度自左至右渐增，并列地显示出来，组成了波场图。通常表达声学上的压力  $P(x, t)$ ，是水平空间坐标  $x$  和垂直时间坐标  $t$  的函数。如果时间轴  $t$  取为回声的垂直旅行时间，该图便表示切割地球的一个截面。

偏移计算是针对下述情况提出的：在地壳分层不是水平的地方，波并不是直上直下的。直接应用方程  $U_{tz} = U_{xx}$ ，能提供一实际的计算方法，处理在许多地区遇到过的一些重要的不是水平分层的情况。图11-6是本节即将叙述的偏移方法的一个实例。图中表明，地震时间剖面和深度剖面上出现的不同现象，不一定完全是由于地层的倾斜引起的。事实上，曲率也常常是重要的因素。因此，即使在相对平缓的地区，偏移也可能是很重要的。

一个脉冲入射到一界面上，产生一脉冲反射；不过，总还有些震源的、接收器的或地球滤波的影响，会把这假定的脉冲波形变成一小的子波。理想的是，地球的截面应该在界面上显示出一脉冲。但是，偏移计算把时间剖面上的子波带进深度剖面去了。这样，时间轴上的分辨率的限制就使得深

度轴上分辨率也受到了限制。有趣的是，水平  $x$  轴上分辨率

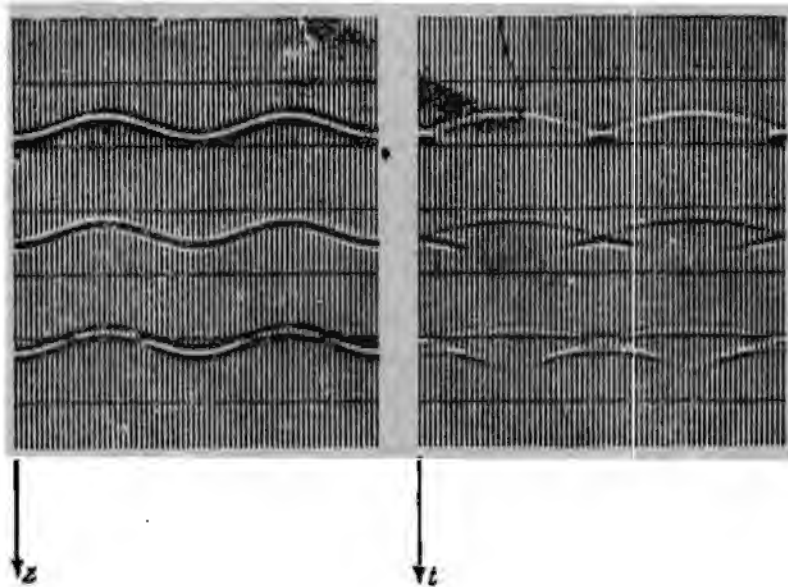


图 11-6

在三个不同深度上的正弦反射界面（左图）及计算出来的零偏移距反射地震剖面（右图）。未加垂直放大。由于各反射界面形状相同，它们应有同样的最大倾角（大约 $150^\circ$ ）。时间剖面上不同于深度剖面上的现象是很明显的，且自上而下差别越来越大。经验表明，显著的差别，在深度达到与反射界面的最小曲率半径（地下焦点）相近时（地下聚焦），才开始发生。图中最小曲率半径约等于最浅反射界面的深度。在最浅的反射界面上出现了很强的聚焦。（取自参考文献8，第758页）。

的问题。顺着—角度传播的波会使子波的分辨率转—角度轴，而不再是垂直轴。很明显，所能获得的最佳水平分辨率应是从水平传播的波得到的。对于 $45^\circ$ 的波，其水平分辨距离会比垂直分辨距离大 $1/(\sin 45^\circ)$ 倍。这在图11-7及其它图中有所显示。

偏移的基本运算，可以不借助于波动方程，只用简单的语句就能说清楚。图11-8和图11-9描绘了在时间域中或在深度域中这两种情况下只包含一个脉冲函数的时—深、深—时转换。实际数据在 $(x, t)$ 上是连续的。图11-8提示了一种基于线性叠加原理的偏移方法；即，取 $(x, t)$ 域中的每一

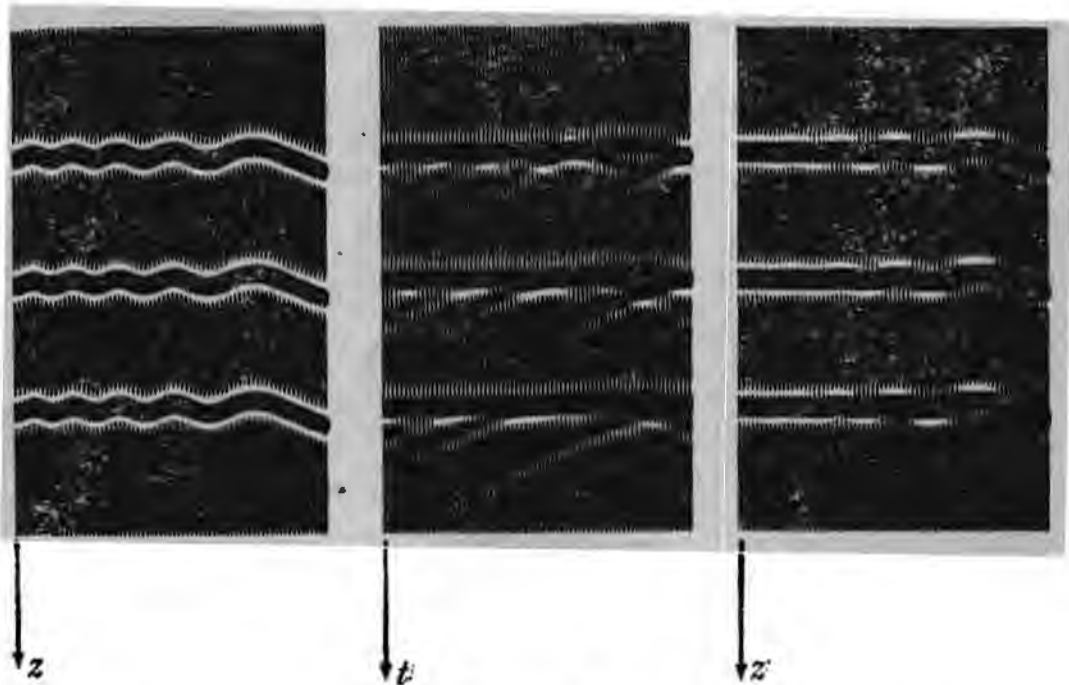


图 11-7

振荡界面的反射，说明横向分辨率的限制。左图是一些振荡界面的原始模型。中图是用本节的方法建立的零偏移距剖面，扩展到 $45^\circ$ 近似，并用数值的粘滞性作了修改，以削弱近于 $30^\circ$ 以外的倾角的能量。右边那一帧是原始模型的重显。已不大可能分辨出界面左端的短波长振荡了（取自参考文献8，第759页）。

个数据点，并投到  $(z, t)$  [译注：应为  $(x, z)$ ] 域中的一圆弧上去。偏移剖面就是所有这些弧线的叠加。自然要问：既然可用圆弧法来做，何必还那么麻烦用波动方程做偏移呢？对这一问题的答案是，要看许许多多实际因素，其中有些是与资料有关的。倾向于用波动方程做偏移的一个理由是：对于非均匀速度，用波动方程比用射线追踪好做一些、也更为准确。目前这两种方法实际上都是可行的。

图 11-10 是说明“偏移”这名词的起源的例子。图中表明，终止于一个点的倾斜界面在其时间资料里，会出现端点离开它的真正位置顺着下倾方向“偏移”的现象。在这类例子中，深度剖面与时间剖面的偏离实际上并不太大，而当倾角减小时，更为轻微。



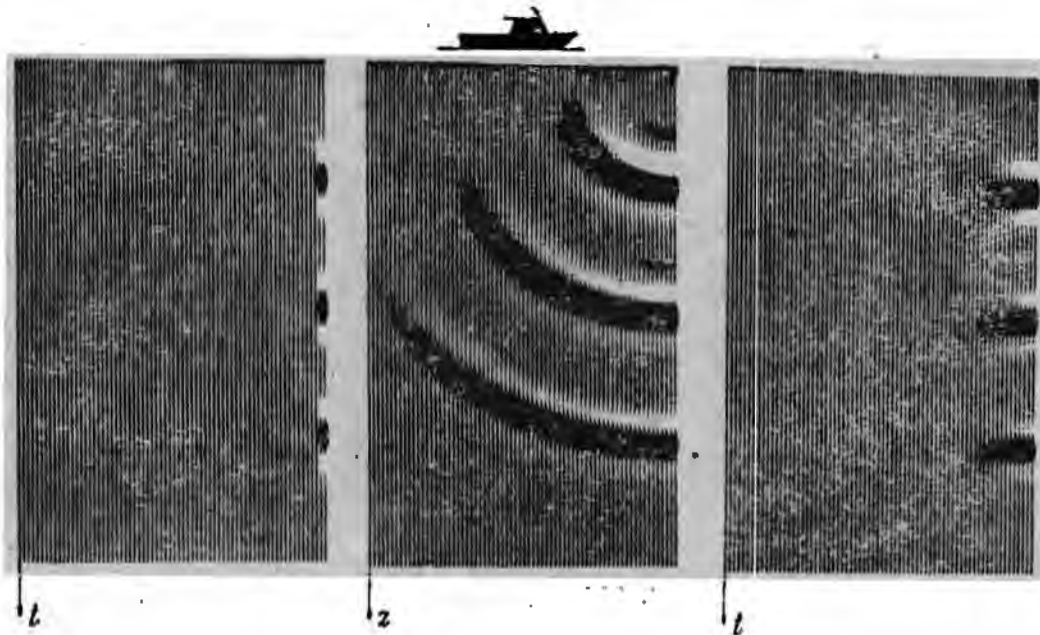


图 11-8

图为时间域脉冲的深度响应及脉冲的重显。左边那帧几乎为空白，说明：当震源和接收器一块儿顺水平方向移动时，开始收不到回声。一直到它们到达该帧的右边缘上才收到回声，这儿有三个单位脉冲，是在三个不同时间到达的回声。以此作为所观察到的资料，其逻辑推论为，地壳的反射构造是中心在右边缘上的三个同心圆。中间那一帧表明了这三个圆（为简单起见，略去了右边的对称部分）。要注意，这些圆的底部比顶部暗黑。这表示，从一个焦点发出的二维波产生的  $45^\circ$  相移。倾角比大约  $45^\circ$  大的波已被数值粘滞性滤波滤掉了。由于这部分能量的损耗加上以复杂角度传播的波的能量损耗，作出的脉冲重显（右边那一帧），其中，脉冲多少有点向水平方向伸开（取自参考文献 8，第 750 页）。

这不是说，倾角不大的资料就不需要做偏移了。因为，正如我们所知，曲率是十分重要的，关于这一点，可看图 11-11 中一个有意思的实例。

野外资料综合分析的例子见图 11-12。

下面说明如何依据第 11-1 节的基本结果（以  $t$  替代  $t'$ ）来做偏移剖面。

$$S(y, z, t) = \int Q(y, f, z, t) df \quad (11-1-13)$$

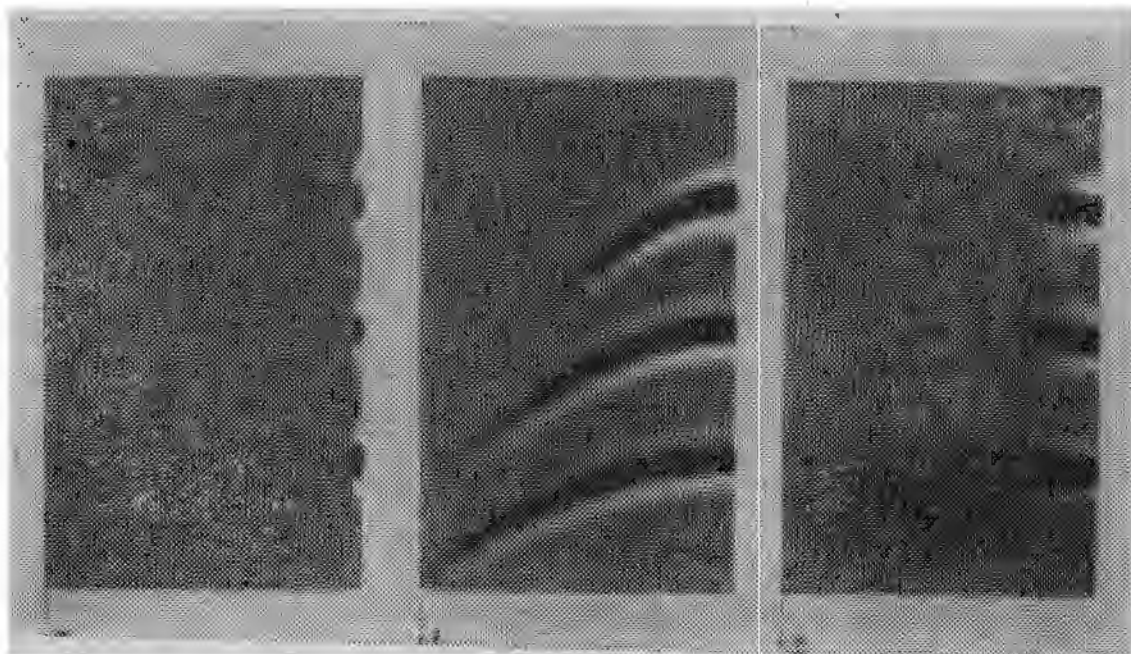


图 11-9

图为深度域脉冲的时间响应及该脉冲的重显。左帧指出一地下模型，包含三个点散射，沿着图的右边缘，从上到下排列着。第二帧表明从这模型得出来的合成的时间资料。我们基本上可观察到对于反射点的双曲线型的旅行时间曲线。第三帧表达的是合成资料经偏移重显这些散射点。如图11-8那样，分辨力也降低了，这是因为，从原则上讲，水平分辨力不会比垂直分辨力来得好（这是由波的频率成分所控制的），而实际上，我们只能包括大约 $40^\circ$ 角度以内的射线（取自参考文献8，第751页）。

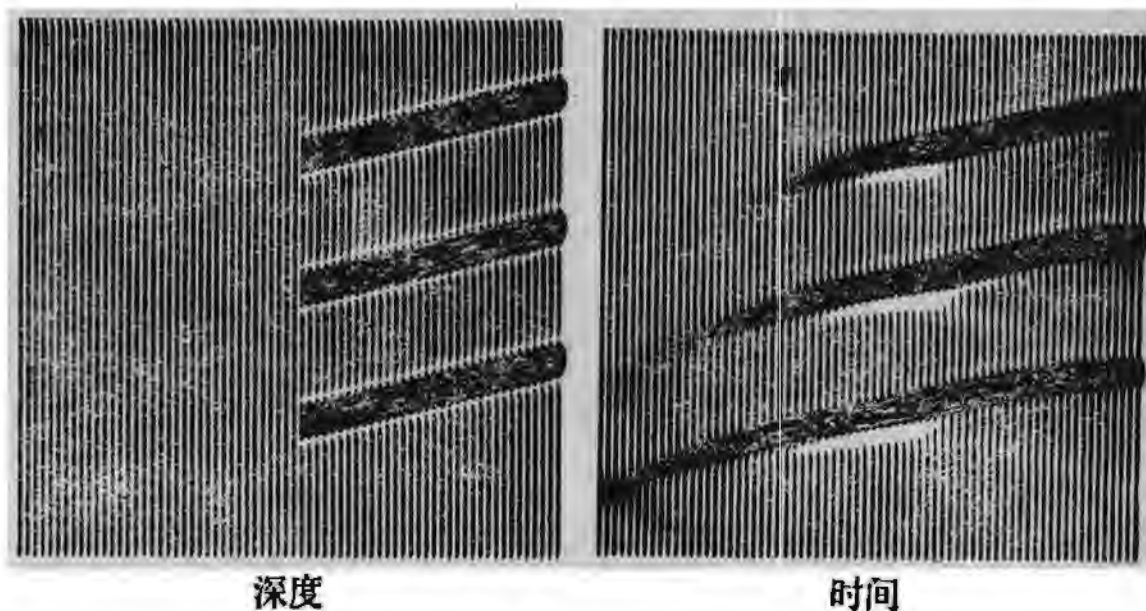


图 11-10

“地震偏移”名词来源图解。左边是个深度剖面图，包含三个两头终止的界面。右图是合成时间资料。注意，在终止点变宽（展成一双曲线）之外，还产生了顺着下倾方向的终止“点”的一般性“偏移”（取自参考文献8，第756页）。

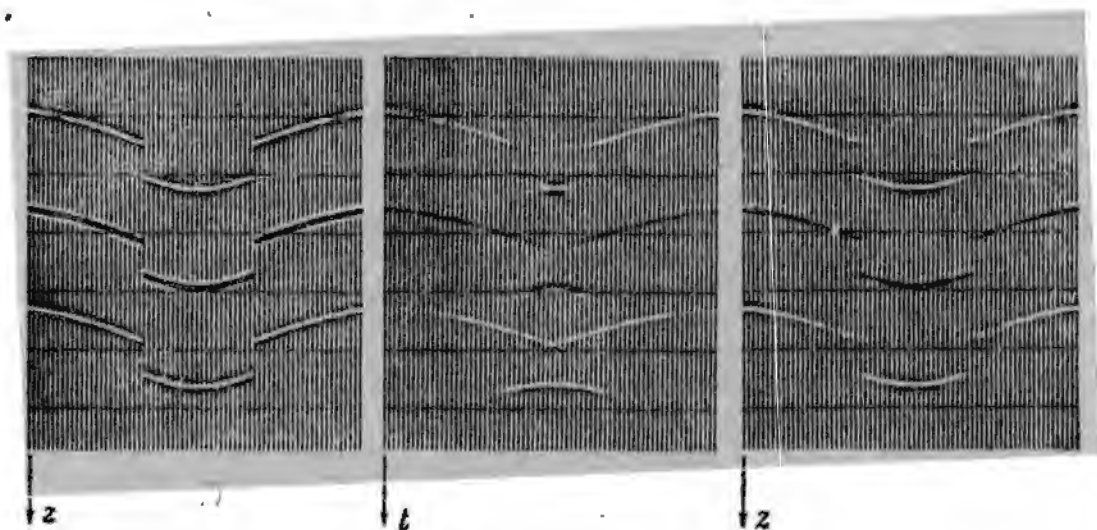


图 11-11

古典的地堑模型。其实际意义在于说明了，凹形构造在时间剖面上呈现为凸形。因此，地质学上的向斜就可能和背斜相混淆。因而，石油聚积的条件就可能推断错误（取自参考文献8，第757页）。

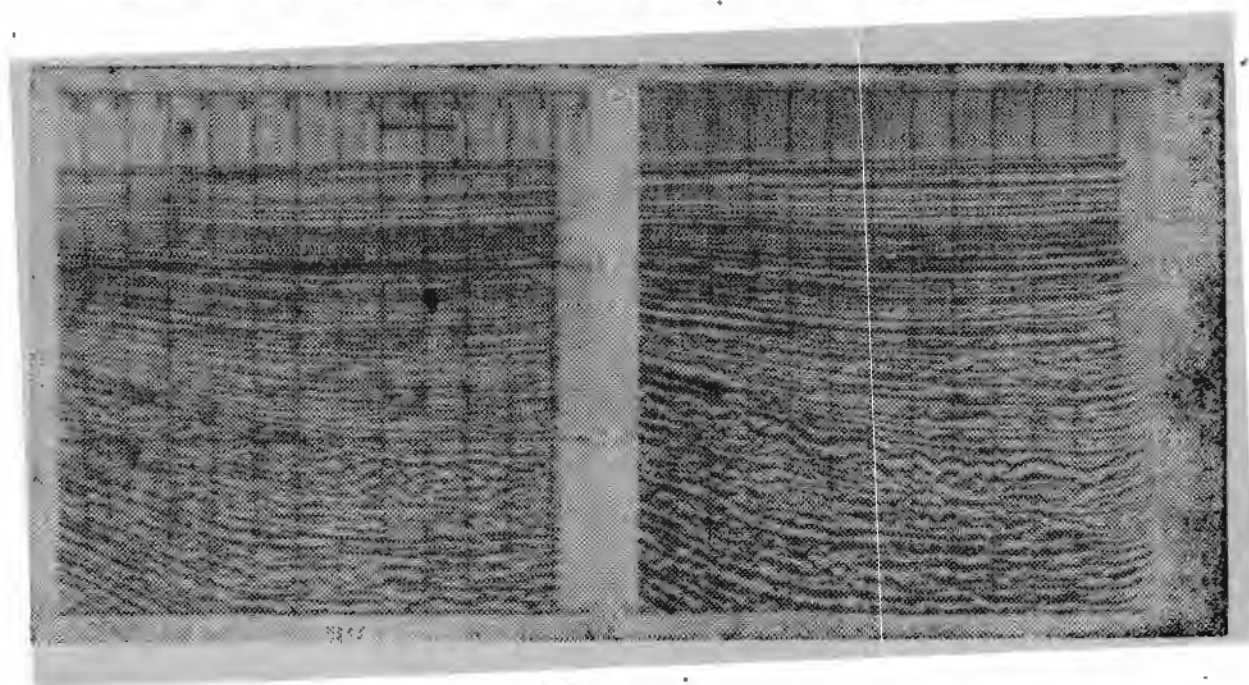


图 11-12

海上反射地震资料的偏移举例。左图资料曾用波动方程作偏移，其结果见右图。在偏移校正剖面（右图）里，恰好在两秒下面有个突出的不规则反射层，它在地面资料上（左图）受到很强的绕射。

$$S_{zt} = \pm \frac{v}{8} S_{yy} \quad (11-1-14)$$

方程 (11-1-13) 确定了在所有偏移 (距) 上波的总和。方程 (11-1-14) 表示的是该总和  $S$ , 已知它在地面上的取值时, 如何向地下进行外推。正负号的选用, 是依照外推下行波或外推上行波而定。至于震源项, (11-1-9) 中的  $\delta(g-s, e, t)$ , 在中心点偏移 (距) 坐标系中, 震源项变为  $\delta(f) \text{const}(y) \delta(z) \delta(t)$  ( $\text{const}$  表示常数)。由于震源项是中心点  $y$  的一个常数函数, 我们可指望 (11-1-14) 对于下行波能简化为  $S_{zt} = 0$ 。 $S_{zt} = 0$  的通解是  $t$  的任意函数和  $z$  的任意函数相加。由于我们感兴趣的是波的振荡, 不是位势, 可以只提出  $z$  的任意函数。剩下的那个与  $z$  无关的时倚函数必是震源函数的时间依赖关系, 即震源的时间  $\delta$  函数。现在我们有下行的、在所有各深度的  $S$  的分析表达式。往后就是要对朝上来的  $S$  向下作数值外推。我们在方程 (11-1-14) 中取负号, 利用 (11-1-14) 就能对上行波作向下的外推。由于下行波是平面波, 而上行波, 当向下朝反射界面看时, 便呈反射界面的形状。于是, 做了偏移的剖面包含了地面的观察资料向下外推到适当深度的结果。

实际做的时候, 目前并不使用由 (11-1-13) 确定的垂直叠加。他们在做加法之前, 按不同偏移 (距) 先做一时移 (为偏移距的函数)。这样做的主要效果是使所有偏移 (距) 道与零偏移 (距) 道更为接近。在零偏移 (距) 剖面上记录下来的波的时间延迟分为下行路程和上行路程并且各为一半。当下行波是个平面波, 而上行波表现为复杂的散射时, 这两条路程有不相等的延迟。考虑到这一点, 我们能够从 (11-3-18) 猜测出一个结果, 这就是对于零偏移 (距) 剖面的偏移方程, 或说是动校正叠加, 类似于 (11-1-14), 但包含了一个外加因子 2。这样, 我们可以从

$$Q_{zt} = -\frac{\bar{v}}{4} Q_{yy} \quad (11-2-1)$$

着手。

或许由于某种理由，要把 $\bar{v}$ 看成是随三个坐标 ( $y, z, t$ ) 中的某一个坐标而变的变量；然而，若令速度对于  $y$  保持为一常数，我们就能够简化在偏移具体过程中首先要遇到的一个步骤。以  $e^{iky}$  对  $y$  变量做付里叶变换，可把 (11-2-1) 简化为

$$0 = \left( \frac{\bar{v}}{4} k_y^2 - \partial_{tz} \right) Q \quad (11-2-2)$$

现在我们把  $z$  和  $t$  坐标离散化。于是 (11-2-2) 中的函数  $Q$  就可能在  $(z, t)$  平面里造出表来，而 (11-2-2) 中的微分算子变为这个二维平面中的  $2 \times 2$  褶积算子，这个算子是

$$\frac{\bar{v}k_y^2}{16} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} - \frac{1}{\Delta z \Delta t} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (11-2-3)$$

记标量因子  $a$  为

$$a = \frac{\Delta z \Delta t \bar{v} k_y^2}{16} \quad (11-2-4)$$

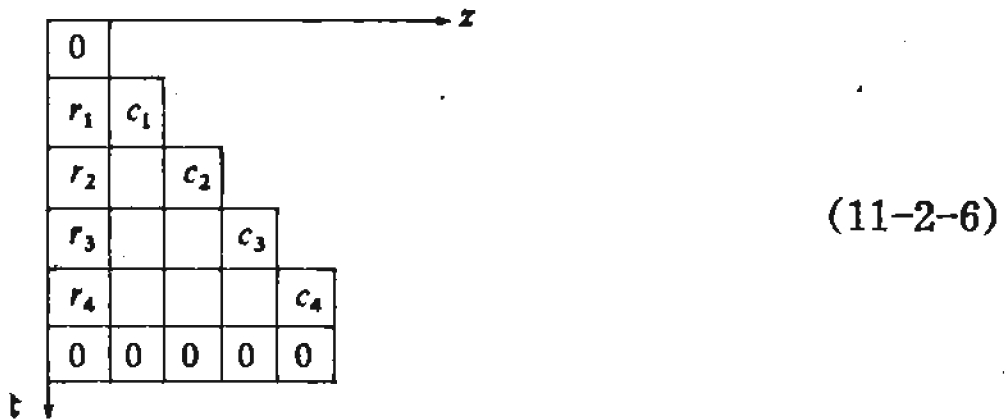
则算子乘以  $\Delta z \Delta t$ ，为

$$\begin{array}{|c|c|} \hline (a^2 - 1) & (a + 1) \\ \hline (a + 1) & (a - 1) \\ \hline \end{array} \quad (11-2-5)$$

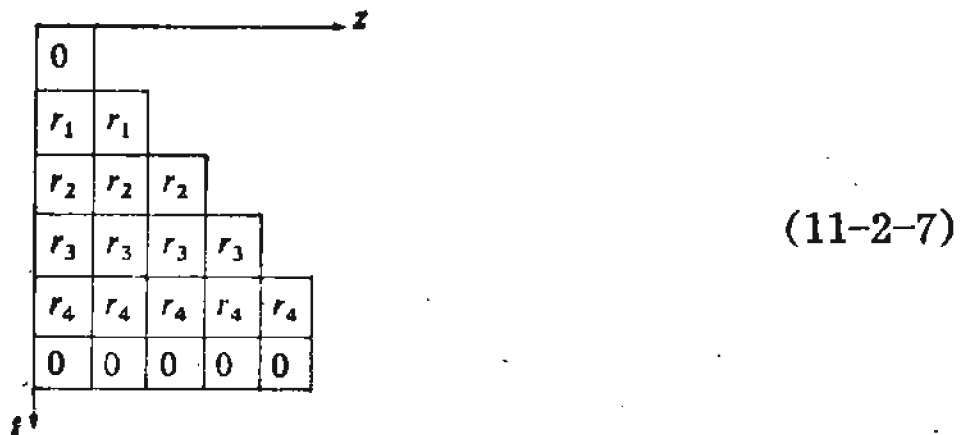
当算子 (11-2-5) 放进  $Q$  表格中的任意地方时，该算子中的四个数就乘到它下面的四个  $Q$  数上去了，(11-2-2) 的含意就

是这四个乘积的总和应该为零。如果我们在  $Q$  表格中找到一个  $Q$  的四个数中实际只知道三个的地方，我们就能够算出其第四个未知数了。事实上， $Q$  只可在沿着  $(z, t)$  平面的几个边界上是已知的，我们能据此把这平面的其余部分填满。

从地面观测资料求偏移及其反算关系可从下列网格看出。



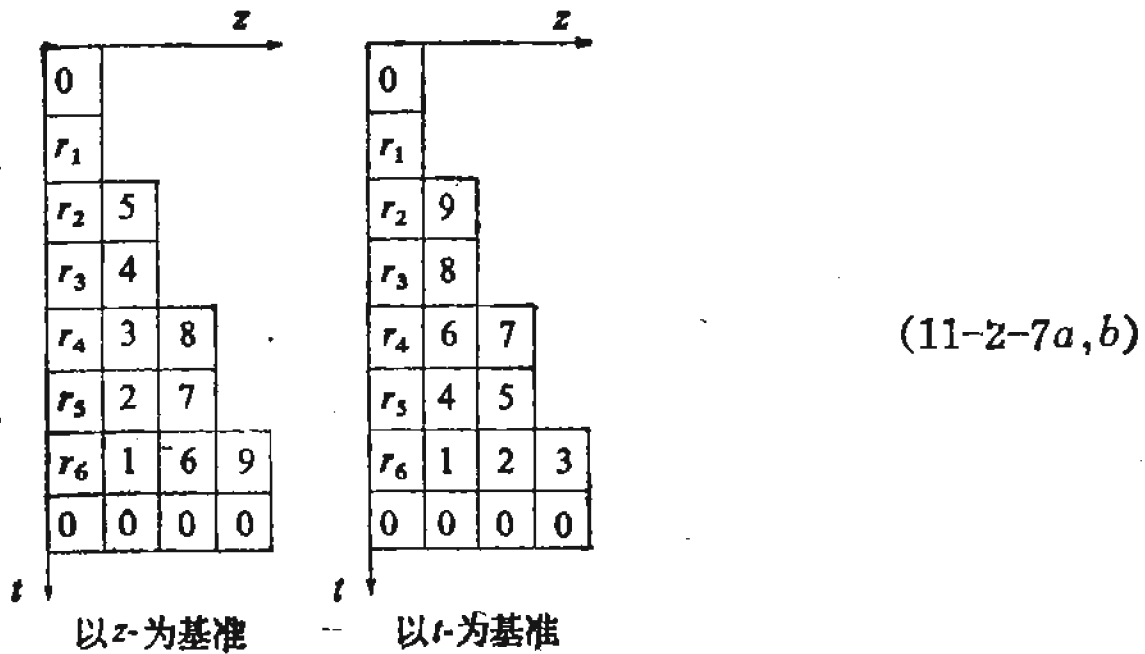
在此网格中， $r_0, r_1, \dots, r_4$  表示地面上所观察到的地震记录， $c_0, c_1, \dots, c_4$  表示作了偏移的剖面。底下一行全为零表示地震记录到充分长的时间之后为零。要注意，在填这个表格时，从  $r_4$  算到  $c_4$  比从  $r_2$  算到  $c_3$  工作量要大些。这是因为对于固定倾角，深的同相轴比浅的同相轴偏移得远些。令  $k_y^2 = 0$ ，有  $a = 0$ ，我们来描述一下地球的层理结构的情况。从地面数据  $r_1, r_2, r_3$  和  $r_4$  以及底行都是零着手，我们可利用 (11-2-5) 来填表格 (11-2-6)，(11-2-6) 变为



检查一下表格 (11-2-7), 我们看到当我们顺  $z$  方向移动时, 都是相等的数。要是我们没有取  $k_y^2 = 0$ , 而是取一个小的  $k_y^2$ , 我们将会看到表格中的数就要在  $z$  方向逐渐起变化了。当  $k_y^2$  不是零的时候, 在填算  $(z, t)$  平面上数据的次序上一定得小心。数  $a$  总是正的。很明显, 如果数  $a$  恰好等于  $+1$ , 那么, 在  $Q$  表格里就不可能确定与  $1-a$  相乘的那些未知数了。这就得出, 不管  $a$  取什么样的数值 (正), 递归地求与  $1-a$  的乘数处理过程如用非最小相位滤波作多项式除法一样是不稳定的。其原因是, 这种处理过程实际上是做多项式除法, 可是多项式呢, 是二维的多项式。这些复杂现象都是因果律物理概念的数学表现。

从解双曲型微分方程的角度来看, 如果在每一坐标轴粗糙一点按每一波长取相同的点数 (典型的是取 8 个点), 那就最为省事了。这意味着, 到目前为止, 我们一直在  $z$  轴上采样过密。菲涅尔近似中的  $15^\circ$  界限, 意味着  $\Delta z$  常常是取为  $v\Delta t$  的五倍或更大些也可以。网格间隔的最优挑选的问题也要考虑到。我们说, 一般野外数据做偏移时,  $\Delta z/v\Delta t$  比值大到 100 仍然可以, 成本也相应地降低了。反正, 为了要把点子图解出来, 我们现在用  $z$  轴上为两倍的粗糙采样, 再把剖面图表画出来。下面两个表中的数表示两种可能有的、不同的次序, 它们都是在利用 (11-2-5) 进行偏移计算时可能用到的。从这两个表作成的偏移剖面, 不在对角线上的点的值都采用内插 (或许很粗糙)。

读者应查对图表 (11-2-7a, b), 每一步计算都是根据图表中三个已知的值, 算填一个新值, 而所要计算的未知数是乘以  $(1+a)$ , 不是乘  $(1-a)$ 。从假定的深度剖面获得合成的时间资料, 计算时应把标明的数值顺序倒过来。



研究一下 (11-2-7a) 和 (11-2-7b) 这两种任选的具体步骤，就会发现，标有“以  $t$  为基准”的那个比标有“以  $z$  为基准”的具有特别的优点：前者所要的计算机存储空间小得多。

另一个要解决的实际问题是：做偏移时要能处理随深度变化的速度。这一点用下述办法能够办到，取偏移数据  $c_1, c_2, \dots$ ，不是从  $(z, t)$  平面里的对角线上取，而是从如图11-13所示的，经过  $(z, t)$  平面的另一条曲线上取。用波动方程做偏移的一个优点是，容易调整速度，而不用重作计算。一旦  $(z, t)$  平面给填满了，就只是个决定显示哪条曲线的问题了。

$(z, t)$  平面里的倾角往往偏小。这意味着速度模型中的改变，即图11-13中的曲线的改变，在偏移深度剖面上引起变化要比在偏移时间剖面上引起的变化更大。由于这些原因，资料解释人员所以经常宁要偏移时间剖面，而不爱用偏移深度剖面。



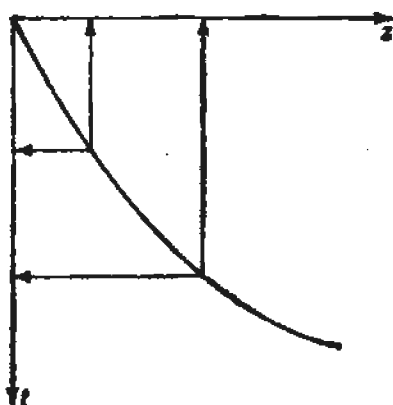


图 11-13

速度随深度变化的偏移平面。平面上的曲线选的是双程垂直旅行时曲线。中心点轴  $y$  在纸页的外边。沿着这曲线的剖面数据可以投影在  $z$  轴上、或投影在  $t$  轴上，形成偏移深度剖面或偏移时间剖面。

最后要考虑的一个因素是速度  $v$  在横向  $y$  变化的可能性。虽然未曾作过详尽的分析，但看来很清楚，只要在(11-2-1)里送进随  $y$  变化的速度，如果速度在  $y$  方向变化得不快的话，前述方法仍可使用。至于改变多少就算是太快了，这个问题与资料有关，已超出了我们目前研究的范围。然而，应该注意到，如果使用了依赖于  $y$  的速度，那么，在  $y$  轴上做付里叶变换时，不能把(11-2-1)简化成(11-2-2)。由此，就需要把  $(z, t)$  表格里的每一个元素，不是作为标量，而是作为向量对待，其各分量从  $y$  轴上不同位置产生出来。于是， $1 + a$  不是看作标量除数，而是当作要取其逆的  $(I - \delta_{yy})$  形式的三对角线矩阵。这根本不会有任何实际困难，而事实上，本节的图就是用这个方法制作出来的。

### 11-3 速度估计

前面几章解决的任务，主要是根据地面观测资料探明地壳构造。从数学上讲，就是说，认为物质的速度是已知的

(并且, 为了方便起见, 有时还假定是恒速的) 而地质构造的形状、界面上的阻抗认为是未知的。现在我们试图根据地面观测资料去求物质的速度。传统的办法是假定地壳构造是由平缓的水平层组成。然后, 在共中心点道集上把同相轴校正到最直 (动校正试探法), 推断出速度。本节中, 将说明水平层这个假定可以不要。我们将看到, 即使在地下包含随机点散射, 其速度也是能够估计出来的。这个方法能够期待在破裂地带, 甚或在“无记录”区域也可以应用。无反射 ( $NR$ ) 或无记录区域是指其最佳处理后的剖面沿着中心点  $y$  坐标看去, 资料仍显不出连贯性的地方。一个区域成为  $NR$ , 不仅因为其资料质量不好, 也由于地质构造本身不具有连续性。可是, 据我们所知, 理论上并没有什么道理说明, 为什么在这种  $NR$  地区就测定不了其物质的速度。

具体做法上, 其基本步骤是把理论上的下行波和观察到的上行波这两者都作向下的延拓。它们向下往各反射界面上投射, 在到达反射界面的地方, 它们的比率作为偏移 (距) 的一个函数, 应该近乎是个常数, 以表示该界面的反射系数。如果它们以一不正确的速度向下投射, 其比率就会是偏移 (距) 的振荡函数。于是任务就归结为, 寻找对这两个波最相适应的那个速度。反射界面有没有侧向连续性, 这没关系, 因为相适性的考察是在反射界面深度相对一固定中心点的不同偏移 (距) 进行的。当反射界面没有侧向连续性时, 它们就可称为散射点。带有随机位置散射点的地壳模型产生偏移的地震资料。是 (动校正) 时间及中心点的随机函数, 但应是偏移 (距) 的常数函数。

试想一个好方法对下行波做向下的延拓, 这还是容易的。这些波自爆炸点做球面扩散。对均匀介质, 我们还可写

出一解析解。对变化缓慢的非均匀介质，我们能采用前面各章的办法。问题是，采用近似  $Q_{zz} \approx 0$ ，限制了那些从垂直方面来的大约  $15^\circ$  角度的有效性。用从笛卡儿坐标  $(x, z)$  变换到极坐标  $(r, \theta)$  的方法，可以很容易地把它改进一下。采用近似  $Q_{rr} \approx 0$  要求射线在  $15^\circ$  角的径线范围之内。很明显，设计“层理的介质坐标系”就能解决速度的非均匀性问题。

较难的问题是要给上行波寻找一个好的坐标系。有个启示，是在观察下行波时，为什么极坐标就比笛卡儿坐标来得好呢？对于拟球面波， $Q_{\theta\theta}$  接近于 0，然而，除非你是在震源的正下方，不然， $Q_{xx}$  就会很快地大起来。因为我们在研讨象  $Q_{zt} = Q_{xx}$  或  $Q_{rt} = Q_{\theta\theta}/r^2$  这样的方程，这意味着， $Q_r$  一般都不大。可是， $Q_z$  只有在  $z$  轴上、直接在震源下面是小的。因此，近似  $Q_{rr} \approx 0$  比  $Q_{zz} \approx 0$  好得多。根据我们的观察， $(r, \theta)$  坐标的好处在于下行波  $D(r, \theta)$  几乎和侧向  $\theta$  坐标没有关系。我们所需要的是这么一个坐标系，在其中，朝上来的波  $U$  几乎与横向坐标没有关系。有经验的地球物理工作者立刻就会确认，动校正资料可满足这项要求。动校正是对远偏移（距）地震记录上所作的时间轴的压缩，把远偏移（距）波的到达时间变为垂直入射波的到达时间。由此，波场  $Q$  的偏微分，相应于在一固定动校正时间的炮检偏移（距），应该是小的。

我们的资料与那些已知速度的地下平缓的水平反射界面得到的资料越接近，偏移（距）微分就会越小。波动方程的目的就是处理与这种理想化的情况之间存在的偏离。

这种对远的偏移（距）地震记录所作的时间轴的压缩，实际上是一种坐标的改变。动校正的通常定义不会使我们预

想到要把检波器向地下深处投放。当我们把检波器朝下沿一射程投放时，将保留“地面中心点  $y$ ”和“地面半偏移(距)  $h = f/2$ ”作为波场的横向坐标。理想化的资料其横向微分应该为零。

图 11-14 说明在速度为  $\bar{v}$  的均匀介质里向下延拓的资料

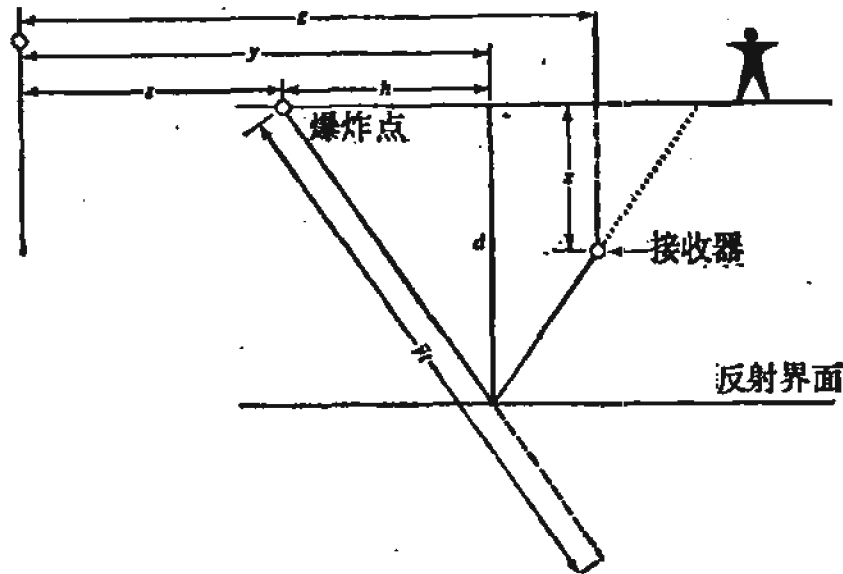


图 11-14

向下延拓资料的动校正的几何关系

的动校正的几何关系。从解释变量到观察变量的变换为

$$s(h, y, d, z) = y - h \quad (11-3-1a)$$

$$g(h, y, d, z) = y + \frac{(d-z)h}{d} \quad (11-3-1b)$$

$$t(h, y, d, z) = \frac{(d^2 + h^2)^{1/2} (2d - z)}{d \bar{v}} \quad (11-3-1c)$$

用代数方法或几何方法都可得出其逆变换

$$d(s, g, t, z) = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \bar{v}^2 t^2 - (g-s)^2 \right]^{1/2} + z \right\} \quad (11-3-2a)$$

$$y(s, g, t, z) = \frac{1}{2} \left\{ (g+s) + \frac{z(g-s)}{[\tilde{v}^2 t^2 - (g-s)^2]^{1/2}} \right\} \quad (11-3-2b)$$

$$h(s, g, t, z) = \frac{1}{2} \left\{ (g-s) + \frac{z(g-s)}{[\tilde{v}^2 t^2 - (g-s)^2]^{1/2}} \right\} \quad (11-3-2c)$$

(11-3-2) 确是 (11-3-1) 的逆, 把 (11-3-1) 代入 (11-3-2), 比较一下就看出来了。

在速度为  $\tilde{v}$  的均匀介质里, 我们可把下行波的解写成一个扩展中的圆的  $\delta$  函数

$$D(g, s, t, z) = \delta[(g-s)^2 + z^2 - \tilde{v}^2 t^2] \quad (11-3-3)$$

上行波  $V$  通过计算可用  $(h, y, d, z)$  变量表达出来, 我们把它与 (11-3-3) 中用  $(g, s, t, z)$  变量表达出来的下行波  $D$  相比较。把 (11-3-1) 代入 (11-3-3), 我们就能把  $D$  转变到用  $(h, y, d, z)$  变量表示; 如果我们假定介质速度  $\tilde{v}$  等于时差坐标系速度  $\tilde{v}$ , 就可得到一个有意义的简化。

$$D(h, y, d, z) = \delta[4d(z-d)] \quad (11-3-4)$$

在这种情况下, 下行波实际上与横向坐标  $h$  和  $y$  无关。

现在让我们考虑一种地下模型, 它仅包含  $(x_0, z_0)$  上的单一散射点。这个散射通过一个位于  $(s, 0)$  的  $\delta$  函数震源来表示。不考虑水平传播的波, 我们对于上行波  $U(s, g, t, z)$ , 在散射点上面一个无穷小距离, 有

$$U(s, g, t, z_0 - 0) = \delta(g - x_0) \delta[\tilde{v}^2 t^2 - (s - x_0)^2 - z_0^2] \quad (11-3-5)$$

把在  $z = d$  的变换 (11-3-1) 代入 (11-3-5), 我们得

$$U(h, y, d, z = d) = \delta(y - x_0) \delta[d^2 + h^2 - (y - h - x_0)^2 - z_0^2]$$

$\delta(y - x_0)$  的存在允许我们在另一个  $\delta$  函数里置  $y = x_0$ , 得

出

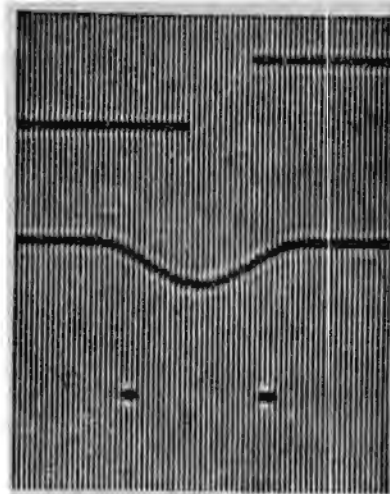
$$U(h, y, d, z = d) = \delta(y - x_0) \delta(d^2 - z_0^2)$$

由此不难看出，反射界面上的波在动校正坐标下的确与半偏移（距） $h$  无关。显然，多个点散射的随机组合会形成一个偏移的波场，它对  $y$  和  $d$  来说是随机的，但对半偏移（距） $h$  仍是常数。并且当这些点散射随机地分布在剖面的平面外侧时，这个结论也是正确的。在三维空间里，把  $z$  只需看作是至横切线的径矩。

以上讨论的目的是为了估计速度，而求速度又是偏移所需要的第一步。如果偏移中采用了错误的速度，则在中心点轴上消除  $\delta$  函数是不可能的。并在相邻的中心点之间会引起很严重的干扰，这表示随机散射点模型的某种信息的丢失，但在层理的地下模型中没什么影响（这时，甚至偏移本身也不必要）。

史蒂芬姆、陶儿蒂(Stephen M. Doherty)<sup>[37]</sup>对这些概念作了一些计算图解。图11-15表明一个地下模型。图11-16表明这个模型的地面资料和向下延拓的资料。

$z = 2.5$



$r = 3.5$

图 11-15

说明用向下延拓的资料作速度分析的地下模型

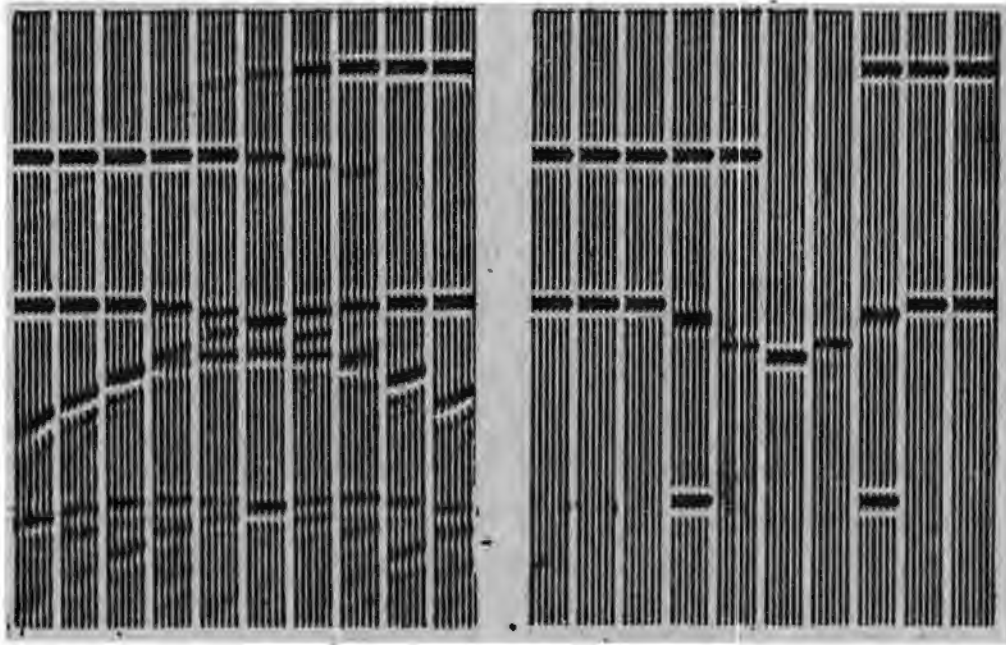


图 11-16

这是图11-15模型的地面资料和向下延拓的资料。坐标的设计，在二维的页面上显示三维资料 ( $y, h, d$ )。垂直轴，如通常那样，是  $d$  坐标。至于水平轴， $h$  坐标是在  $h$  的六个值上采样，成组（共同中心点道集）地显示。沿  $y$  轴，放了十个这样的道集。在每一道集里， $h=0$  在左边，相应于大约  $45^\circ$  射线的  $h_{\max}$  在右边。左边那帧表示地面资料，右帧说明延拓到反射界面上的资料。在反射界面上，我们看见波形的水平排列，这表示资料与偏移（距） $h$  无关。

从测定速度的观点来看，用什么坐标系把所观察的波形向下延拓，不是实质性的问题。但是，在动校正坐标系中把这些波作向下延拓时较为便当。所作的和前面的方式是一样的。为了代数简化，首先注意，(11-3-2b) 和 (11-3-2c) 蕴含着

$$\frac{\partial y}{\partial(g, t, z)} = \frac{\partial h}{\partial(g, t, z)} \quad (11-3-6)$$

波动方程

$$\left( \partial_{gg} + \partial_{zz} - \frac{\partial_{tt}}{v^2} \right) P = 0 \quad (11-3-7)$$

在动校正坐标中取下列形式

$$\left[ (d_g \partial_d + y_g \partial_y + h_g \partial_h)^2 + (\partial_z + d_z \partial_d + y_z \partial_y + h_z \partial_h)^2 - \frac{(d_t \partial_d + y_t \partial_y + h_t \partial_h)^2}{\bar{v}^2} \right] Q = 0 \quad (11-3-8)$$

如前，当我们把这些偏微分算子平方起来时，要把式中的系数当作常数。这是高频率假定，即波场的变化远比坐标系引起的变化要快。在我们计算所有需求的微商之前，我们约定用  $b$  来简化下列组合的表示

$$b = [\bar{v}^2 t^2 - (g-s)^2]^{1/2} \quad (11-3-9)$$

算出所要求的微商，想到 (11-3-6) 有

$$\begin{pmatrix} d_g & d_z & d_t \\ y_g & y_z & y_t \\ h_g & h_z & h_t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{(g-s)}{b} & 1 & \frac{\bar{v}^2 t}{b} \\ 1 + \frac{z\bar{v}^2 t^2}{b^3} & \frac{g-s}{b} & -\frac{(g-s)\bar{v}^2 t z}{b^3} \\ 1 + \frac{z\bar{v}^2 t^2}{b^3} & \frac{g-s}{b} & -\frac{(g-s)\bar{v}^2 t z}{b^3} \end{pmatrix} \quad (11-3-10)$$

首先，我们很快就发现，如果动校正速度  $\bar{v}$  等于介质速度  $\tilde{v}$ ，即  $\tilde{v} = \bar{v} = v$ ，那么 (11-3-8) 里三个项都为零。用直接代入法，读者可验证

$$\left( d_g^2 + d_z^2 - \frac{d_t^2}{v^2} \right) Q_{dd} = 0 \quad (11-3-11a)$$

$$2 \left( d_g y_g + d_z y_z - \frac{d_t y_t}{v^2} \right) Q_{dy} = 0 \quad (11-3-11b)$$

$$2 \left( d_g h_g + d_z h_z - \frac{d_t h_t}{v^2} \right) Q_{dh} = 0 \quad (11-3-11c)$$



其次，我们得出带  $\partial_z$  的三个交叉项

$$2y_z Q_{yz} = \frac{g-s}{bQ_{yz}} = \frac{h}{dQ_{yz}} \quad (11-3-12a)$$

$$2h_z Q_{hz} = \frac{g-s}{bQ_{hz}} = \frac{h}{dQ_{hz}} \quad (11-3-12b)$$

$$2d_z Q_{dz} = Q_{dz} \quad (11-3-12c)$$

从 (11-3-6) 我们看到  $Q_{yy}$ ,  $Q_{hh}$  和  $2Q_{yh}$  的系数是相同的。通过一系列的代数约简，得

$$\left( y_g^2 + y_z^2 - \frac{y_t^2}{v^2} \right) (\partial_y + \partial_h)^2 Q = - \left( \frac{d}{2d-z} \right)^2 \left( \frac{1+h^2}{d^2} \right) (\partial_y + \partial_h)^2 Q \quad (11-3-13)$$

和前面一样，我们用丢掉  $Q_{zz}$  项的方法做类菲涅尔近似。在笛卡儿坐标系中，可把射线的精确处理局限在垂直大约  $15^\circ$  的一个圆锥体里。这在动校正坐标系中，看上去更象是对构造倾角的  $15^\circ$  的限制。当然，在需要的时候可使用更精确方法。把 (11-3-11) 和 (11-3-13) 排在一起，我们得到基本结果

$$\left[ \partial_d + \frac{h}{d} (\partial_y + \partial_h) \right] \partial_z Q = \left( \frac{d}{2d-z} \right)^2 \left( 1 + \frac{h^2}{d^2} \right) (\partial_y + \partial_h)^2 Q \quad (11-3-14)$$

方程 (11-3-14) 可以用做剖面向下的延拓。此剖面是为确定速度所必需的经过动校正的非叠加剖面。

看来对某些特殊情况还应该细讲一下 (11-3-14)。在

零偏移 (距) 的地面上,  $Q_n$  对称地消失了。在点散射上, 我们看到  $Q$  与  $h$  没有关系。对于从层理反射界面得来的理想化的资料,  $Q$  只是  $d$  的函数。为适应多种多样的实际情况, 以  $Q_d \gg Q_y \gg Q_n$  去简化 (11-3-14) 结果是合情合理的。这样, 就得到

$$Q_{dz} = - \left( \frac{d}{2d-z} \right)^2 \left( 1 + \frac{h^2}{d^2} \right) Q_{yy} \quad (11-3-15)$$

式中出现的变量系数  $d/(2d-z)$ , 若把它和以前常数系数的方程相比, 可能会感到惊奇。我们现在证明, 对于偏移, 它们并没有什么实质上的差别。定义一新变量

$$z' = \frac{zd}{2d-z} \quad (11-3-16)$$

注意, 在地面  $z=0$ , 我们有  $z'$  等于零, 在反射界面上  $z=d$ , 我们有  $z'=d$ 。想到  $Q(z, d) = Q'(z', d)$ , 我们求出

$$Q_z = z'_z \partial_{z'} Q'$$

$$Q_d = (\partial_d + z'_d \partial_{z'}) Q'$$

根据这些, (11-3-15) 的左边变为

$$Q_{dz} = (\partial_d - z'_d \partial_{z'}) z'_z \partial_{z'} Q$$

在类菲涅尔近似中, 我们舍掉  $\partial_{z'} z'$ , 得到

$$Q_{dz} = z'_z Q_{dz'} = \frac{2d^2}{(2d-z)^2} Q_{dz'}$$

这把 (11-3-15) 简化为

$$Q_{dz'} = - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{h^2}{d^2} \right) Q_{yy} \quad (11-3-17)$$

为了证明在第11-2节中确定的因子2是有道理的, 我们可

以作从  $d$  到双程旅行时坐标  $t'$  的另一变换

$$t' = \frac{2d}{v}$$

这给出

$$Q_{t'z'} = -\frac{v}{4} \left[ 1 + \left( \frac{2h}{vt'} \right)^2 \right] Q_{yy} \quad (11-3-18)$$

当然, (11-3-18) 必定是从  $z' = 0$  到  $z' = t'v'/2$  做积分。把深度轴重新做标度的便当方法就是用双程旅行时间  $t''$

$$t'' = \frac{2z'}{v}$$

这导致方程

$$Q_{t't''} = -\frac{v^2}{8} \left[ 1 + \left( \frac{2h}{vt'} \right)^2 \right] Q_{yy} \quad (11-3-19)$$

其中,  $t'$  是双程旅行时,  $t''$  是从地面  $t'' = 0$  到在  $t'' = t'$  的反射界面上做了积分的双程旅行时深度轴。

严格说来, (11-3-19) 应该首先应用于每个偏移 (距)  $h$  的资料, 然后再按偏移 (距) 求总和 (叠加)。为了省事, 该资料常在用 (11-3-19) 做偏移之前先做叠加。在这个折衷的办法里, (11-3-19) 中的  $h$  取为零, 或使用某种平均值  $2h/vt'$ 。

到目前为止, 我们已经说明了, 如果以正确的速度向下延拓的话, 向下延拓的、动校正的地震记录就与偏移 (距) 无关。我们所不清楚的是如何从向下延拓了的资料估计速度

误差。在前面的分析中我们曾略去了重要的一项 ( $Q_{zz}$ —译注)。在研究非均匀介质中的传播时, 见过这一项, 我们务必始终记住介质速度  $\tilde{v}(x, z)$  与动校正速度  $\bar{v}$  [可以一般化为  $\bar{v}(z)$ ] 之间的区别。而不要由于在 (11-3-11) 为了简化把其区别抹掉了。回想到, 层理模型的小的偏离,  $Q_d \gg Q_y \gg Q_h$ , 我们就了解 (11-3-11) 三项中的第一项最重要。区别开这两种速度, 现在 (11-3-11a) 便引入这重要的项

$$\left( d_g^2 + d_z^2 - \frac{dt^2}{\tilde{v}^2} \right) Q_{dd} \neq 0 \quad (11-3-20)$$

$$\frac{\bar{v}^2 t^2}{\tilde{v}^2 t^2 - (g-s)^2} \left( 1 - \frac{\bar{v}^2}{\tilde{v}^2} \right) Q_{dd} \neq 0$$

$$\left( 1 + \frac{h^2}{d^2} \right) \left( 1 - \frac{\bar{v}^2}{\tilde{v}^2} \right) Q_{dd} \neq 0 \quad (11-3-21)$$

所以, 用这个新项而不作其它的近似, (11-3-15) 变为

$$Q_{dz} = - \left( \frac{d}{2d-z} \right)^2 \left( 1 + \frac{h^2}{d^2} \right) Q_{yy} + \left( 1 + \frac{h^2}{d^2} \right) \left( 1 + \frac{\bar{v}^2}{\tilde{v}^2} \right) Q_{dd} \quad (11-3-22)$$

在数值计算上, 我们可用分裂法解 (11-3-22), 这方法是交替地用下列两个方程将解向下的投影

$$Q_{dz} = - \left( \frac{d}{2d-z} \right)^2 \left( 1 + \frac{h^2}{d^2} \right) Q_{yy} \quad (11-3-23a)$$

$$Q_z = \left(1 + \frac{h^2}{d^2}\right) \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{\tilde{v}^2}\right) Q_d \quad (11-3-23b)$$

方程 (11-3-23a) 可称为“绕射”部分，而 (11-3-23b) 可以称为“薄透镜”部分。(11-3-23b) 的效用是当  $Q$  在  $z$  方向投射时，每个地震记录〔地震记录就是 (动校正的) 时间  $d$  在一固定半偏移 (距)  $h$  和中心点  $y$  上的一个函数〕承受一次稳定的时移 ( $d$  移)。 $d$  移的量随速度误差按  $1 - \bar{v}^2/\tilde{v}^2$  而递增，并随偏移 (距) 按  $1 + h^2/d^2$  递增。因此，

(11-3-23b) 的效用是以半偏移 (距)  $h$  来改变资料的曲率。然而，(11-3-23a) 包含了  $Q_{yy}$ ，但不包含  $Q_h$  或  $Q_{hh}$ 。这意味着 (11-3-23a) 和 (11-3-23b) 的运算在交替进行。因此，我们能够用 (11-3-23a) 从老远向下投射到反射界面，然后，再用 (11-3-23b)。然而，由于 (11-3-23a) 是依赖于速度  $\bar{v}$  的，不是依赖于物质速度  $\tilde{v}$  的。所以就使我们能够较为节省地试验各种不同的介质速度  $\tilde{v}$ 。

在挑选介质速度  $\tilde{v}$  的最佳估计之前，我们必须考虑使上行波  $U$  与某个反射系数  $c$  乘以一下行波  $D$  相匹配的问题，这些波的匹配是可以在场记录坐标里做出的，不过，我们倾向于在动校正坐标系统中做。首先，取一个在动校正坐标中的下行波的表达式，把 (11-3-1) 代入 (11-3-3)，得出

$$D(h, y, d, z) = \delta \left[ 4d(z-d) + \left(1 - \frac{\tilde{v}^2}{\bar{v}^2}\right) \left(1 + \frac{h^2}{d^2}\right) (2d-z)^2 \right] \quad (11-3-24)$$

目前, 我们并不想保持幅值的缓慢变化〔球形扩张曾从(11-3-3)略去了〕, 所以, 我们能以  $-4d$  遍除  $\delta$  函数的变元。由于我们对那些  $\tilde{v}$  相对  $\bar{v}$  的小量变差感兴趣,  $\delta$  函数就会在离  $z=d$  很近的地方为零。因此, 对一个好的近似来说, 我们能在  $(1 - \tilde{v}^2/\bar{v}^2)$  的系数中, 以  $z$  代替  $d$ , 得出

$$D(h, y, d, z) = \delta \left[ d - z - \left( 1 - \frac{\tilde{v}^2}{\bar{v}^2} \right) \left( 1 + \frac{h^2}{z^2} \right) \frac{z}{4} \right]$$

$$= \delta (d - z - s) \quad (11-3-25)$$

其中, 我们给定义了一个时 ( $d$ ) 移函数

$$s \left( h^2, z, \tilde{v}/\bar{v} \right) = \left( 1 - \frac{\tilde{v}^2}{\bar{v}^2} \right) \left( 1 + \frac{h^2}{z^2} \right) \frac{z}{4} \quad (11-3-26)$$

现在让我们回到使上行波和下行波相匹配的问题。我们希望以幂级数的形式, 沿用某个角度依赖关系去测定一个反射系数, 例如

$$c = c_0 + \frac{c_1 h}{z} + \frac{c_2 h^2}{z^2} + \dots \quad (11-3-27)$$

为了简化后面的工作, 我们用求极值方法只估计常数项  $c_0$

$$\min_c \sum_h \sum_d [U(y, z, h, d) - c(y, z) D(y, z, h, d)]^2 \quad (11-3-28)$$

其解为

$$c(y, z) = \frac{\sum_h \sum_d U D}{\sum_h \sum_d D^2} \quad (11-3-29)$$

因为  $D$  许多都等于零了, 我们就能用一个和号来代替双重

和, 形式上显得清爽些, 其分子

$$\begin{aligned} \text{分子} &= \sum_h \sum_d U(y, z, h, d) \delta(d - z - s) \\ &= \sum_h U[y, z, h, d = z + s(h^2, z, \tilde{v}/\bar{v})] \end{aligned} \quad (11-3-30)$$

令  $N$  表示偏移 (距) 总和中的项数, 对于 (11-3-29) 得出

$$c(y, z, \tilde{v}) = \frac{1}{N} \sum_h U \quad (11-3-31)$$

最后, 要确定速度  $\tilde{v}$  了, 它是为使  $U - cD$  达到最佳极小而选定的。为此, 可以使用计算机在  $\tilde{v}$  上扫描, 以寻求极小

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{v}} \sum_h \sum_d (U - cD)^2 &= \min_{\tilde{v}} \sum_h (U - c)^2 \\ &= \min_{\tilde{v}} \sum_h \left( U - \frac{1}{N} \sum_h U \right)^2 = \min_{\tilde{v}} \left[ \left( \sum_h U^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{N} \left( \sum U \right)^2 \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (11-3-32)$$

在实践中, 与其对平方和减去和的平方求极小, 还不如对其负的对数或相似比率 (Semblance 表示相似比) 求极大来得好。

$$\text{Semblance} = \frac{(\sum U)^2}{N \sum U^2} \leq 1 \quad (11-3-33)$$

这比率对波  $U$  的幅值不敏感, 这是它的优点, 而且它本身也便于在较宽的 (速度变化) 条件下显示。

## 11-4 多次反射

精确地制作多次反射模型，就可以从野外资料上把多次反射去掉，以提供更多的一次反射信息。我们首先温习一下简化了的层理的多次反射模型，然后，再修改一下，使之应用于二维的非均匀的地下情况。我们要求解正演和反演两方面的问题。正演问题是已知反射系数的二维空间分布，求略带弯曲的含有绕射多次反射的界面。反演问题是从波推断反射系数的二维空间分布。

对于反演问题，所用的基本概念仍然是，“地下反射界面存在于下行波的到达时间与上行波到达时间相重合的地方。识别多次反射的一个实际做法，是要把那些使得在下行波到达之前上行波就已消失了的反射系数挑选出来，因为这样的反射系数不反映一次反射。在第8章里，我们了解到，对于层状介质，下行波  $D(Z)$  的  $Z$  变换多项式是最小相位。这意味着， $D(Z)$  的倒数，即  $1/D(Z)$ ，能按  $Z$  的正幂展开，且其第一个系数是  $1/d_0$ 。所以，在第  $n$  层中，在该层的底部的反射系数就是在  $U^n(Z)/D^n(Z)$  展开式中  $Z$  的最低次幂的系数。我们的意图是要说明在地面  $n=0$  的地方， $U^n(Z)/D^n(Z)$  是可观察到的，然后，再说明  $U^{n+1}/D^{n+1}$  容易从  $U^n/D^n$  计算出来。首先，必须认为压力  $P$  和垂直速度  $W$  在地面上，对于所有时间都是已知的。

由9-3节和方程 (9-3-12a) 及 (9-3-12b)，我们有

$$\begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{Y} \\ 1 + \frac{1}{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} \quad (11-4-1)$$



及

$$\begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -Y & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix} \quad (11-4-2)$$

在 (11-4-1) 及 (11-4-2) 中, 我们把地面 ( $n=0$ ) 压力  $P^0(Z) = p_0$  看作于时间  $t=0$  点的一个  $\delta$  函数, 是对地面边界条件  $P^0 = 0$  的一次瞬时扰动, 由于这种扰动能量才进入介质。它使得  $W^0$  在  $t=0$  点也有  $\delta$  函数的特性; 随后, 地壳中的反射界面又使得  $W^0$ , 当  $P^0$  已等于零时, 它不为零。为了应用我们现在的方法, 我们要求  $U^0 = \frac{1}{2}(P - YW)$ , 它在第一个回声到达之前等于零, 然后, 它等于观察到的返回波形变个符号。我们还要求  $D^0 = \frac{1}{2}(P + YW)$ , 它在  $t=0$  是  $\delta$  函数, 随后是观察到的波形。

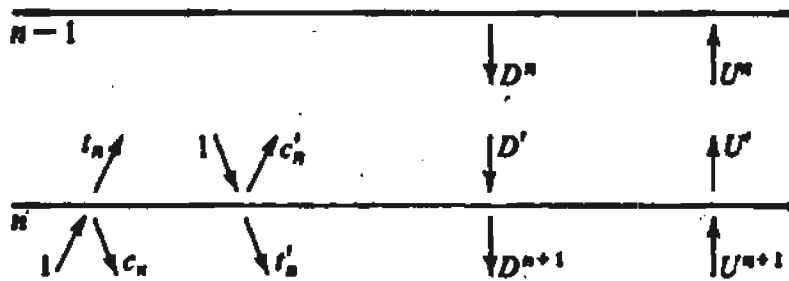


图 11-17

分层介质中, 于第  $n$  个界面散射出去的各种波的定义及记号。

由图11-17可回想起第8章用过的界面上散射的一些记号。当波透过一层时, 有明显的延迟, 这种延迟用半单位延迟算子  $Z^{1/2} = \exp(i\omega \Delta t/2) = \exp(i\omega \Delta z/2v)$  相乘来表示

$$D' = Z^{1/2} D^n \quad (11-4-3)$$

$$U^n = Z^{1/2} U' \quad (11-4-4)$$

在界面上, 下行波的散射化为上行波, 使上行波得到增强

$$U' = t_n U^{n+1} + c'_n D' \quad (11-4-5)$$

从理论的一般化要求来说，还应写出一个与 (11-4-5) 相反的、说明下行波由于上行波的散射而得到增强的方程。然而，在初步分析中我们简化了多次反射，假定只在地面 ( $n=0$ ) 才会从上行波中产生下行波。在地下任何地方，假定下行波只走它们自己的路程，没有加进来自上行波的能量。这样，我们写出

$$D^{n+1} = t'_n D' \quad (11-4-6)$$

(11-4-6) 中建立起来的假定对海上资料是有意义的。在海上，自由海水表面是极强的反射界面。虽然，在实践中，找到的反射系数取值范围很广，不过通常来说海底面系数为 0.1，地面下边的系数为 0.01。用陆地资料，估算许多靠近地面各层中的吸收和散射，常常是很重要的。

现在，从 (11-4-3) 和 (11-4-6) 中消掉  $D'$  和  $U'$  变元，我们得出

$$D^{n+1} = t'_n Z^{1/2} D^n \quad (11-4-7)$$

$$U^{n+1} = \frac{U' - c'_n D'}{t_n} \\ = \frac{Z^{-1/2} U^n + c_n Z^{1/2} D^n}{t_n} \quad (11-4-8)$$

用 (11-4-7) 除 (11-4-8)，我们获得  $U/D$  的向下延拓的一个简单关系

$$\frac{U^{n+1}}{D^{n+1}} = \frac{Z^{-1} U^n / D^n + c_n}{t'_n t_n} \quad (11-4-9)$$

在这简单的递推关系中， $U^n/D^n$  中  $Z^0$  的系数为零 (见图 11-17)， $Z$  的系数是  $c'_n = -c_n$ 。因此，(11-4-9) 中的乘数  $Z^{-1}$  把  $U^n/D^n$  前移，使  $-c_n$  成为  $Z^0$  的系数，然后 (11-4-

9) 里的  $c_n$  又与  $-c_n$  相抵消了。可见, 向下的延拓的确很简单, 其结果几乎可看作是地面比率  $U^0(Z)/D^0(Z)$  的系数。唯一稍微复杂一点的因素是除数  $t'_n t_n$ , 它给  $U^0(Z)/D^0(Z)$  里的  $Z^n$  系数乘以一个  $1/\prod_{k=1}^n (1 - c_k^2)$  单调递增的标量因子。

现在我们把这些层状模型的做法推广到二维非均匀的情形。其差别在于, 将波形朝上和向下延拓单用延滞算子  $Z$  是不能完成的。我们可以用 (10-5-16) 做延拓; 但是, 看来使用 (10-5-17a) 和 (10-5-18) 则更为方便, 也更经济些。它们是

$$D'_{z't'} = \frac{\bar{v}}{2} D'_{x'x'} \quad (11-4-10)$$

$$U''_{z''t''} = -\frac{\bar{v}}{2} U''_{x''x''} - c' z'' \partial_{t''} D' (x'', z'', t'' - \frac{2z''}{v''}) \quad (11-4-11)$$

可以把方程 (11-4-10) 及 (11-4-11) 与 (11-4-7) 及 (11-4-8) 作比较。很明显, 在 (11-4-10) 和 (11-4-11) 中没有估计到透射系数。平常分析野外资料时, 这一不足关系不大, 但是, 如果必要的话, 通过复杂的求微商, 这种不足是能弥补的。

首先, 我们考虑正演的问题。用有限差分记法比用微分方程组 (11-4-10) 和 (11-4-11) 容易理解。我们定义一矩阵  $T$

$$T = -\left(\frac{\bar{v} \Delta z \Delta t}{8 \Delta x^2}\right) \delta_{xx} \quad (11-4-12)$$

由于  $\delta_{xx}$  是二阶差分算子  $\delta_{xx}$ ,  $T$  是个三对角线矩阵。于是, “ $D$  在  $t' = 0$  之前消失” 的边界条件下, (11-4-10) 就能用列表形式写出来

$T+I$	$T-I$
$T-I$	$(T+I)$

 $\cdot$ 

	0	0	0	0	0
	$d_0^0$	$d_0^1$	$d_0^2$	$d_0^3$	$d_0^4$
	$d_1^0$	$d_1^1$	$d_1^2$	$d_1^3$	
	$d_2^0$	$d_2^1$	$d_2^2$		
	$d_3^0$	$d_3^1$			
$t'$	$d_4^0$				

 $= 0$  (11-4-13)

其中,  $\cdot$  表示  $(z, t')$  平面里的褶积。这个表中, 顶上一行皆为零, 左列是地面的观察值, 其它的格内通过计算填入。我们将对正演问题描述有代表性的一步。假定  $U$  和  $D$  两者在  $t = 4$  之前对所有  $z$  都是已知的, 而在  $t = 4$  和  $t = 4$  之后都不知道。我们所要说明的有代表性的一步是在  $t = 4$  时, 如何求得  $U$  和  $D$ 。这就意味着, 除了  $d_4^0$  之外, 我们知道所有记入  $D$  表 (11-4-13) 中的数据了。第一步是把 (11-4-13) 中  $t'$  坐标上的  $D$  取出, 放到  $t''$  坐标上去。如果  $\Delta z = \bar{v} \Delta t / 2$ , 只要把 (11-4-13) 中的相邻的列依次下移一行便成了。

	0	0	0	0	0
	$d_0^0$	0	0	0	0
	$d_1^0$	$d_0^1$	0	0	0
	$d_2^0$	$d_1^1$	$d_0^2$	0	0
	$d_3^0$	$d_2^1$	$d_1^2$	$d_0^3$	0
$t''$	$d_4^0$	$d_3^1$	$d_2^2$	$d_1^3$	$d_0^4$

 $(11-4-14)$

$t''$ 坐标的含意是, 如果产生反射, 则常数  $t''$  的任一给定行上的所有元素能增强在地面  $t''$  到达时间上收到的上行波。方程 (11-4-11) 可以重新排列成

$$\left(\frac{\bar{v}}{2} \partial_{xx} + \partial_{zt}\right)(-U) = c'(x, z) \partial_t D \quad (11-4-15)$$

这能用列表形式表示

$$\begin{array}{|c|c|} \hline T-I & T+I \\ \hline (T+I) & T-I \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline d_1^0 & -u_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline d_2^0 & -u_2^1 & -u_2^2 & 0 & 0 \\ \hline d_3^0 & -u_3^1 & -u_3^2 & -u_3^3 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \\ = \frac{\Delta z}{2} \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & -1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline d_0^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline d_1^0 & d_0^1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline d_2^0 & d_1^1 & d_0^2 & 0 & 0 \\ \hline d_3^0 & d_2^1 & d_1^2 & d_0^3 & 0 \\ \hline & d_3^1 & d_2^2 & d_1^3 & d_0^4 \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & c'_1 & c'_2 & c'_3 & c'_4 \\ \hline \end{array} \quad (11-4-16)$$

表列方程 (11-4-16) 中, 给未知元素留出了空格。在右边, 反射系数与下行波相乘, 向上形成上行波的震源。反射系数行中的  $c_0$  上填的是零, 因为我们要单独地指定边界边件  $d_t^0 = -u_t^0$ 。因此, 我们看到, (11-4-16) 的右边完全是已知的, 而在其左边的未知数, 可以从右向左逐个填入, 所以, 就可算出在  $t'' = 4$  处对所有  $z$  的上行波的表。这就得到了  $d_4^0$ , 能使我们返回来把下行波的另一行填满, 而这又能使我们把上行波的另一行填满, 如此一步一步地做下去。

反演问题的计算步骤也类似。假定  $d_t^0$  对所有  $t$  为已知, 我们希望以递推方式把  $c'_1, c'_2, \dots$  等等计算出来, 只需说明

如何计算  $c'_1$  就够了。假定我们把 (11-4-16) 的靠左两列撤出, 得

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|} \hline g & e_0 \\ \hline g & e_1 \\ \hline g & e_2 \\ \hline g & e_3 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \end{array} \\
 * \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline T-l & T+l \\ \hline T+l & T-l \\ \hline \end{array} \left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \right\} \text{向上褶积}
 \end{array}
 \quad \text{连乘} \quad
 \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & c'_1 \\ \hline \end{array}
 \quad *
 \quad
 \begin{array}{|c|c|} \hline g & 0 \\ \hline g & g \\ \hline g & g \\ \hline g & g \\ \hline g & g \\ \hline \end{array}
 \quad
 \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{\Delta z}{2} & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
 \quad (11-4-17)$$

在 (11-4-17) 中, 左边填有  $g$  的格都为已知。右边有  $g$  的格也和以前一样易于算出。如果  $c'_1$  为已知, 则逐个地计算……,  $e_3, e_2, e_1, e_0$  就不困难了。我们要给计算置一初态, 对某个大的  $N$  令  $e_N$  的近似值为  $e_N = 0$ 。如果准确地使用了  $c'_1$  的值, 那么, 能发现  $e_0$  等于零。既然我们不知道  $c'_1$ , 要用什么值, 我们可试试  $c'_1 = +1$  以求得  $e_0^+$ , 再试试  $c'_1 = -1$  以求得  $e_0^-$ 。  $c'_1$  的准确值应是一个合适的加权线性组合

$$0 = \alpha e_0^+ + \beta e_0^- \quad (11-4-18)$$

其中

$$1 = \alpha + \beta \quad (11-4-19)$$

$$c'_1 = \alpha - \beta \quad (11-4-20)$$

其逆关系式为

$$2\alpha = 1 + c'_1 \quad (11-4-21)$$

$$2\beta = 1 - c'_1 \quad (11-4-22)$$

把 (11-4-11) 简化为

$$0 = (1 + c'_1)e_0^+ + (1 - c'_1)e_0^-$$

或者

$$c'_1 = \frac{e_0^+ + e_0^-}{e_0^+ - e_0^-} \quad (11-4-23)$$

因此，我们计算  $c'_1$  就是根据这样一个原理：对于多次反射来说，深度  $z_1$  上的上行波（为  $e_0$ ）下行波到达  $z_1$  之前，就已为零了。

在所提到的一维的、或二维的算法付诸实现之前，必然还要解决一系列的问题。首先碰到的一个问题是震源在三维里的扩散问题。这就要求作一次球面扩散校正。但由于主要用的是上行波和下行波之间的“比率”，其真振幅看来就不是很重要的了。事实上，在指数增益调整之下计算结果可以成为不变量。真正成问题的是：初始爆炸  $\delta$  函数的振幅不能准确地测量出来，而这在计算时又是必须的。事实上，爆炸

“波形”可以估计到，尽管这波形可能由于剩余动校正而稍微有时间上的误差。但是，在平坦的深水域的海底爆炸波形能得到校准。这时，返回的波除了在海底一次反射附近不为零，其它各处都可令其为 0，这个返回的波形叫  $P$ 。此外，另一个波形  $M$ ，是除了第一个多次反射附近以外，各处都是由这返回的波加权而形成的。理想的是， $P$  与其本身做褶积就应该得到  $M$ ，其偏离程度可用来估计爆炸振幅、计时和波形。

要认清一个事实：强的反射界面可能不是准确地落在一个采样数据点上。这意味着  $(4, 0)$ ， $(3, 1)$ ， $(2, 2)$ ， $(1, 3)$  和  $(0, 4)$  必须被看成同一脉冲波形的相继延迟。它们的谱在高频率上有差别，这和微分方程在波长短于大约

十个采样点时就与差分方程产生偏离是同一类型的问题。没有必要精确地做高频的模型，但数据采样一定要足够地密。在高频情况下会引起不稳定。例如，计算  $U^0/D^0 = -\hat{W}(Z) / [1 + \hat{W}(Z)]$  中，最重要的是估计  $\hat{W}$ ，如果爆炸  $P/I$  是个理想的  $\delta$  函数的话， $\hat{W}$  可以被记录下来。其实， $\hat{W}$  中的高频也实在没什么意义。所以要注意它们是因为：莫使  $1 + \hat{W}$  是非最小相位，不然它就会妨碍除法的进行了。在这种情况下，高频能够从  $\hat{W}$  滤掉，除数势必是正的实函数。东克·瑞利(Don C. Riley)<sup>[38]</sup>证实过，这些实际问题是能够解决的。图11-18就是他计算的一例。

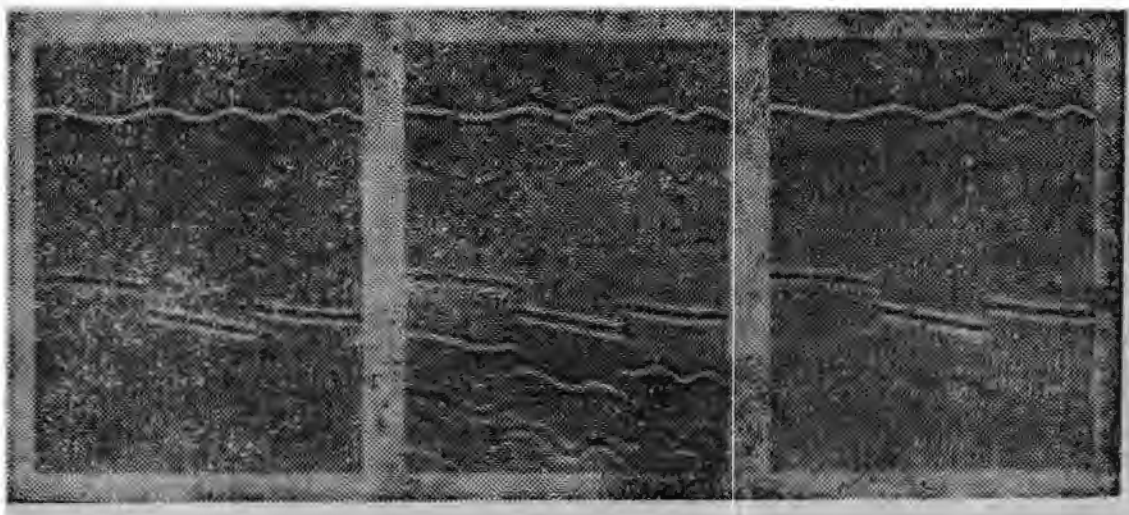


图 11-18

左帧是一个二维的地下反射系数模型。该模型包括一起伏的海床底，下面是断层、倾斜构造。这三幅图片中，接近其底部的水平横线是一秒的计时线。为了显示，对这三幅图都应用了一致的指数增益。垂直加大都是5。中图是合成的时间剖面。可以看到，在海床底下有海底多次反射。在断层、倾斜构造下面是略带弯曲的多次反射波。右帧是对于原来模型所作的重显。



## 参考文献

- [1] FLENN, EDWARD A., ENDERS A. ROBINSON, and SVEN TRETTEL (Eds.): The MIT Geophysical Analysis Group (GAG) Reports, *Geophysics*, vol. 32, no. 3, 1967.
- [2] HASKELL, N. A.: The Dispersion of Surface Waves on Multilayered Media, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, vol. 43, pp. 17-34, 1953.
- [3] CLAERBOUT, JON F.: Coarse Grid Calculations of Waves in Inhomogeneous Media with Application to Delineation of Complicated Seismic Structure, *Geophysics*, vol. 35, no. 3, 1970.
- [4] CLAERBOUT, JON F.: Numerical Holography, *Acoustic Holography*, vol. 3, Plenum Press, 1971.
- [5] CLAERBOUT, JON F.: Toward a Unified Theory of Reflector Mapping, *Geophysics*, vol. 36, no. 3, 1971.
- [6] CLAERBOUT, JON F., and A. O. JOHNSON: Extrapolation of Time Dependent Waveforms along Their Path of Propagation, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, vol. 26, nos. 1-4, pp. 285-295, 1971.
- [7] LANDERS, T., and JON F. CLAERBOUT: Numerical Calculations of Elastic Waves in Laterally Inhomogeneous Media, *J. Geophys. Res.*, vol. 77, no. 8, pp. 1476-1482, 1972.
- [8] CLAERBOUT, JON F., and S. M. DOHERTY: Downward Continuation of Moveout Corrected Seismograms, *Geophysics*, vol. 37, no. 5, pp. 741-768, 1972.
- [9] *IEEE Trans. Audio Electrostat.*, Special Issue on fast Fourier transform, June, 1967.
- [10] WOLD, HERMAN: "Stationary Time Series," Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1938.
- [11] ROBINSON, ENDERS A.: "Random Wavelets and Cybernetic Systems," Griffin, London, 1962.
- [12] GRENANDER, ULF, and GABOR SZEGO: "Toeplitz Forms and Their Applications," University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1958.
- [13] LEVINSON, NORMAN: The Wiener RMS (Root Mean Square) Error Criterion in Filter Design and Prediction, Appendix B in NORBERT WIENER: "Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series," Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1947.
- [14] ATKINSON, F. V.: "Discrete and Continuous Boundary Problems," Academic Press, New York, 1964.
- [15] WHITTLE, P.: "Prediction and Regulation," English Universities Press, Ltd., London, 1963.
- [16] KOLMOGOROV, A.: Sur l'interpolation et l'extrapolation des suites stationnaires, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, vol. 208, pp. 2043-2045, 1939.
- [17] GABOR, D.: Theory of Communication, *J. IEEE*, vol. 93, no. 1, pp. 429-441, 1946.
- [18] MOSTELLER, F., and R. E. K. ROURKE: "Sturdy Statistics," Addison Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1973.
- [19] CLAERBOUT, J. F.: Spectral Factorization of Multiple Time Series, *Biometrika*, vol. 53, nos. 1 and 2, pp. 264-6, 1966.
- [20] SENETA, EUGENE: "Non-Negative Matrices," John Wiley and Sons, Inc., New York, 1973.
- [21] GOLUB, G.: Numerical Methods for Solving Linear Least Squares Problems, *Numerische Mathematik*, vol. 7, pp. 206-216, 1965.
- [22] SINGLETON, R. S.: Algorithm 347 Sort, *Comm. ACM*, vol. 12, 1969.
- [23] HOARE, C. A. R.: Quicksort, *Comput. J.*, vol. 5, pp. 10-15, 1962.
- [24] PLACKETT, R. L.: Studies in the History of Probability and Statistics, Chapt. XXIX, in *The Discovery of the Method of Least Squares: Biometrika*, vol. 59, no. 2,

- pp. 239-251, 1972.
- [25] CLAERBOUT, JON F., and FRANCIS MUIR: Robust Modeling with Erratic Data, *Geophysics*, vol. 38, no. 5, pp. 826-844, 1973.
  - [26] CLAERBOUT, JON F., and E. A. ROBINSON: The Error in Least-Squares Inverse Filtering, *Geophysics*, vol. 29, no. 1, pp. 118-120, 1964.
  - [27] BURG, JOHN PARKER: The Relationship Between Maximum Entropy Spectra and Maximum Likelihood Spectra, *Geophysics*, vol. 37, no. 2, pp. 375-376, 1972.
  - [28] WIDROW, B., P. E. MANTEY, J. J. GRIFFITHS, and B. B. GOODE: Adaptive Antenna Systems, *Proc. IEEE*, vol. 55, pp. 2143-2159, 1967.
  - [29] LEVIN, M. J.: Maximum Likelihood Array Processing, MIT Lincoln Laboratory Technical Report, 1964.
  - [30] GOUPILLAUD, P.: An Approach to Inverse Filtering of Near Surface Layer Effects from Seismic Records, *Geophysics*, vol. 26, no. 6, pp. 754-760, 1961.
  - [31] KUNETZ, G.: Generalization des opérateurs d'antirésonance a un nombre quelconque de réflecteurs, *Geophys. Prosp.*, vol. 12, pp. 283-289, 1964.
  - [32] WHITE, J. E.: Use of Reciprocity Theorem for Computation of Low-Frequency Radiation Patterns, *Geophysics*, vol. 25, no. 3, pp. 613-624, 1960.
  - [33] RICHTMYER, ROBERT D., and K. W. MORTON: "Difference Methods for Initial Value Problems," John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967.
  - [34] MITCHELL, A. R.: "Computational Methods in Partial Differential Equations," John Wiley and Sons, Inc., New York, 1969.
  - [35] GOODMAN, J. W.: "Introduction to Fourier Optics," McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.
  - [36] TREITEL, SVEN, J. L. SHANKS, and C. W. FRASIER: Some Aspects of Fan Filtering, *Geophysics*, vol. 32, no. 5, pp. 789-800, 1967.
  - [37] DOHERTY, STEPHEN M.: "Structure Independent Seismic Velocity Estimation," doctoral dissertation, Geophysics Department, Stanford University, Stanford, California, 1975.
  - [38] RILEY, DON CLINTON: "Wave Equation Synthesis and Inversion of Diffracted Multiple Seismic Reflections," doctoral dissertation, Geophysics Department, Stanford University, Stanford, California, 1975.